COLLEGE.MOURAJAA.COM	المعادلات و المتراجحات الحصر و المجالات	السنة التاسعة

❖ المعادلات من الدّرجة الأولى ذات مجهول واحد:

كلّ معادلة تؤول كتابتها إلى شكل $ax = b$ حيث a عدد حقيقي مخالف للصفر و b عدد حقيقي معلوم تسمّى معادلة من الدّرجة الأولى ذات مجهول واحد في مجموعة الأعداد الحقيقيّة.

مثال:

① $2x = 3$ هي معادلة من الدّرجة الأولى ذات مجهول واحد.

② $(x-1)^2 - x^2 = 3$ هي معادلة من الدّرجة الأولى ذات مجهول واحد.

لأنّ: $x^2 - 2x + 1 - x^2 = 3$

يعني $-2x + 1 = 3$

يعني $-2x = 2$ على شكل $ax = b$

③ $(x-1)^2 - 4 = 0$ هي معادلة ليست من الدّرجة الأولى و لكن يؤول حلّها إلى معادلة من الدّرجة الأولى ذات مجهول واحد بعد تفكيكها.

$(x-1)^2 - 4 = 0$ يعني $(x-1)^2 - 2^2 = 0$

يعني $[(x-1)-2][(x-1)+2] = 0$

يعني $(x-3)(x+1) = 0$

يعني $x-3=0$ أو $x+1=0$

يعني $x=3$ أو $x=-1$

حلّ المعادلة في $\mathbb{R}$ هو $S_{\mathbb{R}} = \{3;-1\}$

④ $\frac{x-1}{2} - \frac{2x-3}{3} = \frac{2x+1}{4} + \frac{2}{3}$ هي معادلة من الدّرجة الأولى ذات مجهول واحد.

حلّ المعادلة:

$$\frac{6(x-1)}{6\times2} - \frac{4(2x-3)}{4\times3} = \frac{3(2x+1)}{3\times4} + \frac{4\times2}{4\times3}$$

يعني $6(x-1) - 4(2x-3) = 3(2x+1) + 8$

يعني $6x - 6 - 8x + 12 = 6x + 3 + 8$

يعني $-8x = 6 + 3 + 8 - 12$

يعني $-8x = 5$

$x = -\frac{5}{8}$ إذن $S_{\mathbb{R}} = \left\{-\frac{5}{8}\right\}$

⑤حلّ في $\mathbb{R}$ المعادلة : $\sqrt{2}x^2 - 2x = 0$

يعني $x\left(\sqrt{2}x - 2\right) = 0$

يعني $\begin{cases} \sqrt{2}x - 2 = 0 \\ \sqrt{2}x = 2 \\ x = \sqrt{2} \end{cases}$ أو $x = 0$

إذن $S_{\mathbb{R}} = \left\{0, \sqrt{2}\right\}$

⑥ حلّ في $\mathbb{R}$ المعادلة : $4x^2 - 12x + 9 = 0$

يعني $(2x-3)^2 = 0$

يعني $2x - 3 = 0$

يعني $2x = 3$

يعني $x = \frac{3}{2}$

إذن $S_{\mathbb{R}} = \left\{\frac{3}{2}\right\}$

ملاحظة: لحلّ معادلة من الدّرجة الثانية ذات مجهول واحد يجب تفكيكها إلى جذاء عوامل ليؤول حلّها إلى معادلة من الدّرجة الأولى ذات مجهول واحد.

مثال①:

$(x-1)(x+1) - (x-1)(2x+1) = 0$

يعني $(x-1)\left[(x+1) - (2x+1)\right] = 0$

يعني $(x-1)\times(x+1-2x-1) = 0$

يعني $(x-1)\times(-x) = 0$

يعني $\begin{matrix} x-1=0 \\ x=1 \end{matrix}$ أو $x = 0$

إذن $S_{\mathbb{R}} = \{0;1\}$

مثال②: $(3x-1)^2 = (x+2)^2$

يعني $(3x-1)^2 - (x+2)^2 = 0$

يعني $\left[(3x-1)-(x+2)\right]\times\left[(3x-1)+(x+2)\right] = 0$

يعني $(2x-3)\times(4x+1) = 0$

يعني $\begin{cases} 4x+1=0 \\ 4x=-1 \\ x=-\frac{1}{4} \end{cases}$ أو $\begin{cases} 2x-3=0 \\ 2x=3 \\ x=\frac{3}{2} \end{cases}$

إذن $S_{\mathbb{R}} = \left\{-\frac{1}{4}; \frac{3}{2}\right\}$

مثال③:

$$(2x-3)^2-(3-2x)(x+1)=0$$

يعني $(2x-3)^2+(2x-3)(x+1)=0$

يعني $(2x-3)\times[(2x-3)+(x+1)]=0$

يعني $(2x-3)(3x-2)=0$

يعني $\begin{cases} 3x-2=0 \\ 3x=2 \\ x=\dfrac{2}{3} \end{cases}$ أو $\begin{cases} 2x-3=0 \\ 2x=3 \\ x=\dfrac{3}{2} \end{cases}$

إذن $S_{\mathbb{R}}=\left\{\dfrac{2}{3};\dfrac{3}{2}\right\}$

❖ **الحصر و المجالات :**

نقول عن عدد حقيقي x أنّه محصور بين عددين حقيقيين a وb حيث $a\le b$

إذا كان $a\le x\le b$ و العدد b-a يسمّى: مدى الحصر

مثال:

① $3,14\langle\pi\langle3,15$ نقول أنّ العدد π محصور بين العددين 3,14 و 3,15 و مدى الحصر هو $3,15-3,14=0,01=10^{-2}$

② $1,4142\langle\sqrt{2}\langle1,4143$ نقول أنّ العدد $\sqrt{2}$ محصور بين عددين حقيقيين و مدى الحصر هو 10^{-4}

③ $-2\le x\le1$ مدى الحصر هو $1-(-2)=3$

❖ a وb و c و d أعداد حقيقيّة حيث $a\le b$ و $c\le d$

إذا كان $a\le x\le b$ و $c\le y\le d$

فإنّ $a+c\le x+y\le b+d$

مثال: ليكن $-1\le x\le\dfrac{3}{2}$ و $2\le y\le\dfrac{7}{2}$

1) أوجد حصرا لـ $x+y$ و $-2x+4$

2) استنتج أنّ : $-2x+4\neq0$

الإصلاح:

حصر لـ $x+y$:

لدينا $-1\le x\le\dfrac{3}{2}$ و $2\le y\le\dfrac{7}{2}$

يعني $-1+2\le x+y\le\dfrac{3}{2}+\dfrac{7}{2}$ إذن $1\le x+y\le5$

حصر لـ $-2x+4$

لدينا $-1\le x\le\dfrac{3}{2}$ و $-2\in\mathbb{R}_-$

يعني $-2\times\frac{3}{2}\leq -2x\leq -2\times(-1)$

يعني $-3\leq -2x\leq 2$

يعني $-3+4\leq -2x+4\leq 2+4$ إذن $1\leq -2x+4\leq 6$

② $-2x+4\neq 0$

بما أنّ : $1\leq -2x+4\leq 6$

يعني $-2x+4$ محصور بين عدديين موجبين مخالفين لصفر

إذن $-2x+4\neq 0$

a وb و c و d أعداد حقيقيّة موجبة حيث $a\leq b$ و $c\leq d$

إذا كان $a\leq x\leq b$ و $c\leq y\leq d$

فإنّ : $a\times c\leq x\times y\leq b\times d$

مثال:

① $\sqrt{2}\leq x\leq 2$ و $\frac{\sqrt{2}}{2}\leq y\leq 3$

يعني $\sqrt{2}\times\frac{\sqrt{2}}{2}\leq x\times y\leq 2\times 3$ إذن $1\leq xy\leq 6$

② ليكن $-3\leq x\leq -1$ و $1\leq y\leq 2$

أوجد حصرا لـ $x\times y$ و x^2 ثمّ $\frac{x}{y+2}$

<u>الإصلاح:</u>

حصر لـ xy

لدينا $-3\leq x\leq -1$ يعني $1\leq -x\leq 3$

و $1\leq y\leq 2$ إذن $1\leq -xy\leq 6$

و منه $-6\leq xy\leq -1$

حصر لـ x^2

لدينا $-3\leq x\leq -1$ يعني $1\leq -x\leq 3$

يعني $1\leq (-x)^2\leq 9$ إذن $1\leq x^2\leq 9$

حصر لـ $\frac{x}{y+2}$

نعلم أنّ : $\frac{x}{y+2}=x\times\frac{1}{y+2}$

حصر لـ $\frac{1}{y+2}$

لدينا $1\leq y\leq 2$

يعني $3\leq y+2\leq 4$

يعني $\frac{1}{4} \leq \frac{1}{y+2} \leq \frac{1}{3}$ و $1 \leq -x \leq 3$

إذن $\frac{1}{4} \times 1 \leq \frac{-x}{y+2} \leq 3 \times \frac{1}{3}$ يعني $\frac{1}{4} \leq \frac{-x}{y+2} \leq 1$

إذن $-1 \leq \frac{x}{y+2} \leq -\frac{1}{4}$

❖ **المجالات المحدودة:**

a و b عددان حقيقيّان حيث $a \leq b$

إذا كان $a \leq x \leq b$

نقول أنّ : $x \in [a\ ;\ b]$

$[a\ ;\ b]$ يسمّى مجالا مغلقا طرفاه a و b

مثال: $I = \{x \in \mathbb{R} / -1 \leq x \leq 3\}$

نقول أنّ $x \in [-1;3]$

$I = [-1;3]$ يسمّى مجالا مغلقا طرفاه 1- و 3

تمثيل المجال على المستقيم المدرّج:

ملاحظة: $3 \in [-1;3]$

$-1 \in [-1;3]$

a وb عددان حقيقيّان حيث $a \leq b$

إذا كان $a \langle x \langle b$

نقول أنّ : $x \in]a\ ;\ b[$

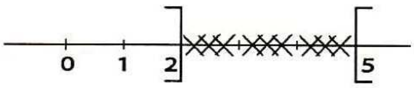
$]a\ ;\ b[$ يسمّى مجالا مفتوحا طرفاه a و b

مثال: $J = \{x \in \mathbb{R} / 2 \langle x \langle 5\}$

نقول أنّ $x \in]2;5[$

$J =]2;5[$ يسمّى مجالا مفتوحا طرفاه 2 و 5

تمثيل المجال على المستقيم المدرّج:



ملاحظة: $2 \notin]2;5[$

$5 \notin]2;5[$

a و b عددان حقيقيّان حيث $a \leq b$

إذا كان $a \langle x \leq b$

نقول أنّ : $x \in]a;b]$

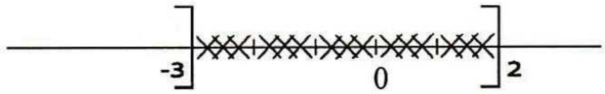
$]a\ ;\ b]$ يسمّى مجالا نصف مفتوح على اليسار طرفاه a و b .

مثال: $k = \{x \in \mathbb{R} / -3 \langle x \leq 2\}$

نقول أنّ : $x \in]-3\ ;\ 2]$ و $k =]-3;2]$

يسمّى مجالا نصف مفتوح على اليسار طرفاه 3- و 2.

تمثيل المجال على المستقيم المدرّج:



ملاحظة: $-3 \notin]-3\,;2]$

$2 \in]-3\,;2]$

a و b عددان حقيقيّان حيث $a \leq b$

إذا كان $a \leq x < b$

نقول أنّ : $x \in [a\,;\,b[$

$[a\,;b[$ يسمّى مجالا نصف مغلق على اليسار طرفاه a و b

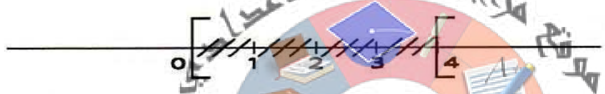
مثال: $L = \{x \in \mathbb{R} / 0 \leq x < 4\}$

نقول أنّ: $x \in [0\,;\,4[$

$L = [0\,;\,4[$

يسمّى مجالا نصف مغلق على اليسار طرفاه 0 و 4.

تمثيل المجال على المستقيم المدرّج:



ملاحظة: $0 \in [0\,;\,4[$

$4 \notin [0\,;\,4[$

❖ المجالات غير المحدودة

a عدد حقيقي إذا كان $x \geq a$ فإنّ: $x \in [a\,;\,+\infty[$

$[a\,;+\infty[$ يسمّى المجال المغلق غير محدود على اليمين طرفه a.

مثال: $I = \{x \in \mathbb{R} / x \geq -2\}$

$I = [-2;+\infty[$

تمثيل المجال I على المستقيم المدرّج:

ملاحظة: $-2 \in I$

a عدد حقيقي إذا كان $x > a$ فإنّ $x \in]a\,;+\infty[$

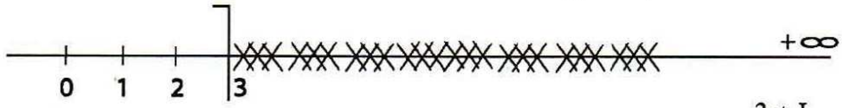
$]a\,;+\infty[$ يسمّى المجال المفتوح غير محدود على اليمين طرفه a.

مثال: $J = \{x \in \mathbb{R} / x > 3\}$

$J =]3;+\infty[$

J يسمّى المجال المفتوح غير محدود على اليمين طرفه 3

تمثيل المجال J على المستقيم المدرّج:



ملاحظة: $3 \notin J$

a عدد حقيقي إذا كان $x \leq a$

فإنّ : $x \in]-\infty ; a]$

$]-\infty ; 0]$ يسمّى المجال المغلق غير محدود على اليسار طرفه a .

مثال:

$K = \{x \in \mathbb{R} / x \leq 1\}$

$K =]-\infty ; 1]$

تمثيل المجال K على المستقيم المدرّج:

ملاحظة: $1 \in K$

a عدد حقيقي إذا كان $x <$a فإنّ $x \in]-\infty , a[$

مثال: $L = \{x \in \mathbb{R} / x \langle 0\}$

$L =]-\infty ; 0[$

تمثيل المجال L على المستقيم المدرّج.

ملاحظة: $0 \notin L$

❖ المجالات الخاصّة:

a عدد حقيقي موجب.

إذا كان $|x| \leq a$ يعني $x \in [-a , a]$

إذا كان $|x| < a$ يعني $x \in]-a ; a[$

إذا كان $|x| \geq a$ يعني $x \in]-\infty ; -a] \cup [a ; +\infty[$

إذا كان $|x| > a$ يعني $x \in]-\infty ; -a[\cup]a ; +\infty[$

مثال:

① ليكن $-1 \langle x \langle 1$

أوجد حصرا لـ x^2

الإصلاح:

لدينا $-1\langle x\langle 1$

يعني $0\langle |x|\langle 1$

يعني $0\langle |x|^2\langle 1$

يعني $0\langle x^2\langle 1$

و منه $x^2\in[0,1]$

②ليكن $|x-1|\leq 3$

أوجد حصرا لـ x

الإصلاح:

لدينا $|x-1|\leq 3$

يعني $-3\leq x-1\leq 3$

و منه $-3+1\leq x\leq 3+1$

إذن $-2\leq x\leq 4$

$x\in[-2;4]$

③ $|x|>1$ يعني $x\in\,]-\infty;-1]\cup]1;+\infty[$

❖ **المتراجحات:**

كلّ لا مساواة تؤول كتابتها إلى $ax+b\leq 0$ أو $ax+b<0$ أو $ax+b\geq 0$ أو $ax+b>0$ حيث a عدد حقيقي معلوم مخالف للصّفر و b عدد حقيقي معلوم،تسمّى متراجحة من الدّرجة الأولى ذات مجهول واحد x في مجموعة الأعداد الحقيقية.

مثال①: $2x-1\leq 3$ متراجحة من الدّرجة الأولى ذات مجهول واحد.

حلّ المتراجحة في $\mathbb{R}$:

$2x-1\leq 3$

يعني $2x\leq 3+1$

يعني $2x\leq 4$

يعني $x\leq 2$

إذن $S_{\mathbb{R}}=\,]-\infty,2]$

مثال②: حلّ في $\mathbb{R}$ المتراجحة: $(2x-1)-3(x-1)<1$

يعني $2x-1-3x+3<1$

يعني $-x<1+1-3$

يعني $-x<-1$

$x>1$

إذن $S_{\mathbb{R}}=\,]1\,,\,+\infty[$