برامج الثلاثي الثاني في الجبر

- الأعداد العشرية النسبية و الأعداد الكسرية النسبية
- الجمع والطّرح في مجموعة الأعداد الكسريّة
  - الجمع والفرق بين عددين كسريين لهما نفس المقام
  - الجمع والفرق بين عددين مختلفين في المقام
  - الخاصية التبديلية والتجميعية للجمع
  - التعامل مع الأقواس
- الضّرب والقسمة في مجموعة الأعداد الكسريّة النسبيّة
- القوى في مجموعة الأعداد الكسرية النسبيّة

الأعداد الكسريّة النّسبيّة

1 الأعداد الصّحيحة النّسبيّة

تعريف: Z هي مجموعة الأعداد الصّحيحة النّسبيّة.

ملاحظات:

- تضمّ المجموعة Z الأعداد الصّحيحة الموجبة و الأعداد الصّحيحة السّالبة.
- المجموعة N هي مجموعة الأعداد الصّحيحة الموجبة.
- كلّ عدد كسري نسبي يكون بسطه قابلا للقسمة على مقامه هو عدد صحيح نسبي. مثال: $3 = \frac{21}{7}$.

تطبيق: أكمل بـ $\in$ أو $\notin$:

$4 \;...\; Z$ $\qquad 2{,}7 \;...\; Z$ $\qquad 7 \;...\; N$

$-5 \;...\; Z$ $\qquad \frac{15}{3} \;...\; Z$ $\qquad -6 \;...\; N$

2 الأعداد العشريّة النّسبيّة

تعريف: D هي مجموعة الأعداد العشريّة.

ملاحظات:

- كلّ عدد صحيح نسبي هو عدد عشري نسبي.
  مثال: $8{,}0 = 8$.
- كلّ عدد كسري نسبي يمكن تحويل مقامه إلى أحد قوى العدد 10 هو عدد عشري نسبي.
  مثال: $0{,}12 = \frac{12}{100} = \frac{3}{25}$.

تطبيق: أكمل بـ $\in$ أو $\notin$:

$3{,}4 \;...\; D$ $\qquad \frac{129}{1000} \;...\; D$ $\qquad \frac{7}{5} \;...\; D$

$6 \;...\; D$ $\qquad -2 \;...\; D$ $\qquad 0 \;...\; D$

تمرين منزلي: حدّد مع التّعليل الأعداد العشريّة ضمن هذه الأعداد:

$\frac{14}{35}$ ، $\frac{11}{24}$ ، $\frac{18}{100}$ ، $\frac{12}{4}$ ، $\frac{77}{28}$ ، $\frac{15}{18}$

3 الأعداد الكسريّة النّسبيّة

تعريف: Q هي مجموعة الأعداد الكسريّة.

ملاحظات:

- كلّ عدد صحيح نسبي هو عدد كسري نسبي. مثال: $3 = \frac{3}{1}$.
- كلّ عدد عشري نسبي هو عدد كسري نسبي. مثال: $2{,}7 = \frac{27}{10}$

تطبيق: حوّل إلى عدد كسري مختزل إلى أقصى حدّ: $1{,}32$ ، $0{,}275$

تنشيط:

حدّد العلاقة بين المجموعتين: $A = \{2, -7\}$ و $B = \{2, 5, -7, -1\}$

تعريف الإحتواء: المجموعة A محتواة في المجموعة B

إذا كانت جميع عناصر المجموعة A منتماة إلى المجموعة B.

مثال: إذا كانت $A = \{5 , 8 , -3\}$

و $B = \{5, 0, -4, -3\}$

فإنّ $A \not\subset B$ لأنّ $8 \notin B$.

تطبيق: أكمل بـ: $\subset$ أو $\not\subset$:

$Z \; ... \; \left\{4, \frac{15}{3}\right\}$ $\qquad$ $D \; ... \; \left\{\frac{3}{5}, \frac{2}{7}, \frac{1}{4}\right\}$ $\qquad$ $Q \; ... \; \left\{\frac{1}{3}, 0{,}6\right\}$

العلاقة بين المجموعات الأربعة: $N \subset Z \subset D \subset Q$.

تمرين منزلي: أكمل بـ: $\subset$ أو $\not\subset$:

$Q_+ \; ... \; Z_+$ $\qquad$ $D_- \; ... \; Z_-$ $\qquad$ $Z_+ \; ... \; N$

تعريف التّقاطع و الإتّحاد:

- تقاطع مجموعتين هو مجموعة العناصر المشتركة للمجموعتين.
- إتّحاد مجموعتين هو مجموعة عناصر كلا المجموعتين.

مثال 1: إذا كانت $A=\{3,-2,4\}$ و $B=\{7,-2,0,3\}$

فإنّ $A\cap B=\{3,-2\}$ و $A\cup B=\{3,-2,0,4,7\}$.

تطبيق:

$$A=\left\{\frac{1}{4},-\frac{2}{7},0,6,\frac{3}{5}\right\}$$

ابحث عن المجموعات التّالية: $A\cap Z$ ، $A\cap D$ ، $A\cap Q$.

مثال 2:

$Z_+\cap Z_-=\{0\}$ و $Z_+\cup Z_-=Z$.

نشاط:

عيّن على $\Delta(O,1cm)$ النّقطتين $A\left(\frac{5}{2}\right)$ و $B\left(-\frac{5}{2}\right)$.

تعريف مقابل عدد كسري نسبي: إذا كان a عدد كسري فإنّ مقابله هو $-a$.

مثال: مقابل $\frac{2}{3}$ هو $-\frac{2}{3}$.

تعريف مقابل مقابل عدد كسري نسبي: إذا كان a عدد كسري فإنّ مقابل مقابله هو a.

مثال: مقابل مقابل $\frac{2}{3}$ هو $\frac{2}{3}$.

قاعدة: $-(-a)=a$. مثال: $-\left(-\frac{2}{3}\right)=\frac{2}{3}$

تطبيق: ابحث عن a في الحالات التّالية:

$-a=7$

$-a=-4$

$-(-a)=6$

<u>تمرين منزلي:</u>

$$A=\left\{\frac{9}{2},\frac{3}{14},\frac{1}{8},\frac{2}{15}\right\}$$

ابحث عن المجموعات التّالية: $A\cap Z$ ، $A\cap D$.

4 قواعد في المقارنة و الترتيب

ملاحظة: لترتيب مجموعة من الأعداد الكسريّة نقوم بمقارنتها بالعدد 1.

مثال: الأعداد $\frac{3}{7}$ ، $\frac{11}{6}$ و $\frac{2}{5}$.

الأعداد الأصغر من 1: $\frac{2}{5}=\frac{2\times 7}{5\times 7}=\frac{14}{35}$ و $\frac{3}{7}=\frac{3\times 5}{7\times 5}=\frac{15}{35}$ إذن $\frac{2}{5}<\frac{3}{7}$

الأعداد الأكبر من 1: $\frac{11}{6}$

الترتيب الكامل: $\frac{2}{5}<\frac{3}{7}<\frac{11}{6}$

تطبيق: رتّب تصاعديًا الأعداد التّالية:

$\frac{11}{6}$ ، $\frac{7}{8}$ ، $\frac{5}{4}$.

$\frac{9}{2}$ ، $0,4$ ، $\frac{1}{3}$ ، $5,7$.

ملاحظة: لمقارنة عددين كسريّين سالبين نقوم بتوحيد مقاميهما.

مثال: $-\frac{3}{5}=-\frac{3\times 7}{5\times 7}=-\frac{21}{35}$

و $-\frac{2}{7}=-\frac{2\times 5}{7\times 5}=-\frac{10}{35}$

$-\frac{21}{35}<-\frac{10}{35}$ إذن $-\frac{3}{5}<-\frac{2}{7}$.

تطبيق: قارن مع التعليل:

$-\frac{6}{7}$ و $-\frac{3}{4}$

$-\frac{5}{6}$ و $-\frac{4}{9}$

<u>تمرين منزلي:</u> رتّب تصاعديًا الأعداد التّالية:

$\frac{8}{5}$ ، $\frac{3}{4}$ ، $\frac{5}{6}$ ، $\frac{7}{8}$ و $\frac{9}{4}$.

$\frac{1}{6}$ ، $\frac{4}{3}$ ، $\frac{5}{8}$ ، $1,6$ ، $\frac{3}{4}$.

قاعدة: إذا كان a و b عددان موجبان بحيث $b < a$ فإنّ $-a < -b$.

مثال: $1 < \frac{8}{3}$ لأنّ $-1 > -\frac{8}{3}$.

نشاط: حدّد الأعداد الأصغر من -1 و الأعداد الأكبر من -1 :

$-\frac{2}{3}$ ، $-\frac{5}{4}$ ، $-\frac{11}{6}$ ، $-\frac{1}{8}$ ، $-\frac{3}{5}$.

ملاحظة: لترتيب مجموعة من الأعداد الكسريّة السّالبة نقوم بمقارنتها بالعدد -1 .

مثال: الأعداد $-\frac{9}{5}$ ، $-\frac{5}{7}$ و $-\frac{2}{3}$

الأعداد الأصغر من -1 : $-\frac{9}{5}$

الأعداد الأكبر من -1 :

$-\frac{5}{7} = -\frac{15}{21}$

و $-\frac{2}{3} = -\frac{14}{21}$ ⇐ إذن $-\frac{5}{7} < -\frac{2}{3}$.

⇐ التّرتيب الكامل: $-\frac{9}{5} < -\frac{5}{7} < -\frac{2}{3}$

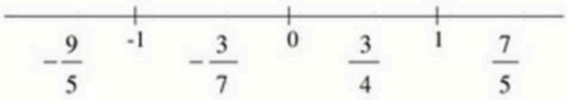
تطبيق: رتّب تصاعديًا الأعداد التّالية: $-\frac{5}{4}$ ، $-\frac{11}{6}$ و $-\frac{1}{3}$.

قاعدة: إذا كان a عدد موجب و b عدد سالب فإنّ $b<a$.

مثال: $-\frac{2}{3}<\frac{1}{4}$ لأنّ $\frac{1}{4}$ عدد موجب و $-\frac{2}{3}$ عدد سالب.

ملاحظة: لترتيب مجموعة من الأعداد الكسريّة النّسبيّة نقوم بوضعها على مستقيم مدرّج محدّد بالأعداد 0، 1 و 1−.

مثال: الأعداد $-\frac{3}{7}$ ، $-\frac{9}{5}$ ، $\frac{3}{4}$ و $\frac{7}{5}$



الترتيب الكامل: $-\frac{9}{5}<-\frac{3}{7}<\frac{3}{4}<\frac{7}{5}$

تطبيق: رتّب تصاعديًا الأعداد التّالية: $\frac{7}{8}$ ، $-\frac{4}{11}$ ، $-0,6$ ، $\frac{5}{12}$ ، $-\frac{7}{3}$

تمرين منزلي: رتّب تصاعديًا الأعداد التّالية:

$-\frac{7}{2}$ ، $-\frac{2}{9}$ ، $-2,4$ ، $-\frac{1}{6}$ ، -5 .

$-\frac{3}{4}$ ، $-\frac{1}{6}$ ، $\frac{15}{8}$ ، -4 ، $-\frac{1}{3}$ ، $0,9$.

5 القيمة المطلقة لعدد كسري نسبي

نشاط: $\Delta(O,I)$ مستقيم مدرّج بحيث $OI = 1\,cm$.

1) عيّن $A(-4)$.

2) جد البعد OA بالصم.

تعريف: القيمة المطلقة لعدد كسري نسبي هي قيمته الموجبة و نرمز لها بـ: $|\quad|$

أمثلة : $|-7| = 7$ و $|9| = 9$

قاعدة: إذا كان $\Delta(O,I)$ مستقيم مدرّج و A نقطة منه فاصلتها a فإنّ $OA = |a|$.

تطبيق: أكمل بـ $\in$ أو $\notin$: $|-3| \ \dots \ N$ $\qquad$ $-|-8| \ \dots \ N$

نشاط: $\Delta(O,I)$ مستقيم مدرّج بحيث $OI = 1\,cm$.

ما هي الفواصل الممكنة للنقطة A إذا علمت أنّ $OA = \frac{9}{5}$.

قاعدة: إذا كان a عدد كسري موجب فإنّ $|x| = a$ يعني $x = a$ أو $x = -a$.

مثال: $|x| = 4$ يعني $x = 4$ أو $x = -4$

تطبيق: جد x في الحالات التاليه:

$|x| = \frac{3}{5}$ $\qquad$ $|x| = -(-7)$ $\qquad$ $|x| = \left|-\frac{3}{4}\right|$

تمرين منزلي: $\Delta(O,I)$ مستقيم مدرّج بحيث: $OI = 3\,cm$.

1) أ- عيّن النّقطتين: $A\left(\frac{2}{3}\right)$ و $B\left(-\frac{5}{6}\right)$.

ب- جد OA و OB.

2) جد فاصلة C إذا علمت أنّ $OC = \frac{7}{5}$ و C تنتمي إلى $[OB)$.

تمـــاريــن

1

حدّد الأعداد العشريّة من بين الأعداد التّالية واكتبها على صورة $\frac{a}{10^n}$ حيث n و a

عدين صحيحين طبيعيين.

$-2{,}75 \; ; \; \frac{120}{780} \; ; \; -\frac{165}{1320} \; ; \; -15{,}4 \; ; \; \frac{14}{35} \; ; \; \frac{5}{17} \; ; \; \frac{6}{33} \; ; \; \frac{5}{7} \; ; \; \frac{21}{15} \; ; \; \frac{15}{4} \; ; \; 0 \; ; \; -5$

2

أتمم بـ $\in \; ; \; \notin \; ; \; \subset \; ; \; \not\subset$

أ) $\mathbb{Q} \ldots \mathbb{Z} \; ; \; \frac{2}{3} \ldots \mathbb{D} \; ; \; \mathbb{N} \ldots \mathbb{Q}_+ \; ; \; \frac{5}{9} \ldots \mathbb{Z} \; ; \; -545 \ldots \mathbb{D}$

ب) $\left\{-37;-25;-\frac{21}{7};11{,}78\right\} \ldots \mathbb{Z} \; ; \; \left\{\frac{5}{4};0;-\frac{15}{14};5{,}21\right\} \ldots \mathbb{D} \; ; \; \{1 ; -2 ; 2{,}5\} \ldots \mathbb{Q}$

نعتبر المجموعات التّالية :

$A=\left\{-\frac{15}{8} ; -5 ; 0{,}7 ; \frac{2}{5} ; 3\right\}$ و $B=\{-9 ; -5 ; 3 ; 18\}$ و $C=\left\{-9;\frac{2}{5};\frac{5}{3};\frac{11}{4};21{,}9\right\}$

1- أ) أيّ هذه المجموعات محتواة في المجموعة $\mathbb{Z}$

ب) أيّ هذه المجموعات محتواة في المجموعة $\mathbb{D}$

ج) أيّ هذه المجموعات محتواة في المجموعة $\mathbb{Q}_+$

2 – حدّد المجموعات التّالية

$A \cap B$

$A \cap C$

$B \cap C$

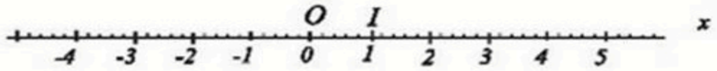
$C \cap \mathbb{D}$

$A \cup B$

$A \cup C$

$A \cap \mathbb{Z}_+$

1 – انقل المستقيم المدرج التّالي



2 – أ) رتّب تصاعديًا الأعداد الكسريّة التّالية $-\frac{7}{4}$; $-1,5$; $\frac{11}{5}$; $\frac{9}{2}$; -2 ; $\frac{-4}{5}$

ب) أحسب القيمة المطلقة لكل عدد من الأعداد السابقة.

3 – أ – عيّن النّقاط A و B و C و D و E و F التّي فاصلاتها على التّوالي

$-\frac{7}{4}$; $-1,5$; $\frac{11}{5}$; $\frac{9}{2}$; -2 ; $\frac{-4}{5}$

ب – أحسب الأبعاد OA و OB و OC و OD و OE و OF

ج – عين نقطة M من (OI) فاصلتها عدد كسري m حيث $|m|=\frac{5}{2}$ (اذكر كلّ الحالات).

د – عين نقطة N من (OI) حيث ON = 3,4 . ما هي فاصلة N؟ (اذكر كلّ الحالات).

هـ – عين النقطة P من (OI) فاصلتها عدد كسري p حيث $|p-3|=0$

تقايس المثلثات

I - حالات تقايس المثلثات العامة

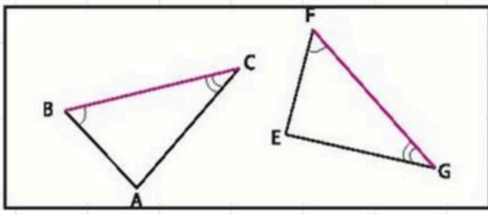
II - حالات تقايس المثلثات القائمة

III - تمارين تطبيقية

تقايس المثلثات

I - المثلثات العامة :

الحالة الأولى : يتقايس مثلثان إذا قايس ضلع والزاويتان المجاورتان له في أحدهما ضلعا والزاويتين المجاورتين له في الثاني.



تطبيق 1 :

أ) أرسم زاوية $\widehat{XOY}$ قيسها $40°$ونقطة A من منصفها $[Oz)$.

ب) ابن على $[Ox)$ نقطة B وابن على $[Oy)$ النقطة C

حيث $\widehat{OAC} = \widehat{OAB} = 60°$.

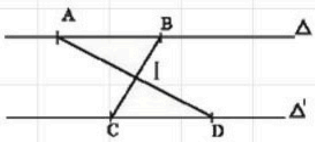
ج) بين أن المثلثين OAB و OAC متقايسان

د) استنتج أن $OC = OB$.

تطبيق 2 :

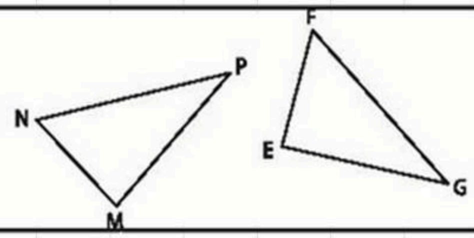
لاحظ الرسم حيث Δ و Δ' مستقيمان متوازيان و $AB = CD$.

I نقطة تقاطع المستقيمين (AD) و(CB)



أ) بين أن المثلثين ABI وCDI متقايسان.

ب)استنتج أن النقطة I منتصف كل من $[AD]$ و $[BC]$

	الحالة الثانية : يتقايس مثلثان إذا قايس ضلعان والزاوية المحصورة بينهما في أحدهما ضلعين والزاوية المحصورة بينهما في الثاني.

تطبيق1:

أ) ارسم مثلثا ABC متقايس الضلعين قمته الرئيسية A

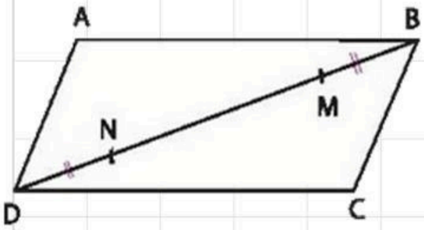
ب) عين على [AB] نقطة M وعلى [AC] نقطة N
بحيث AM = AN.

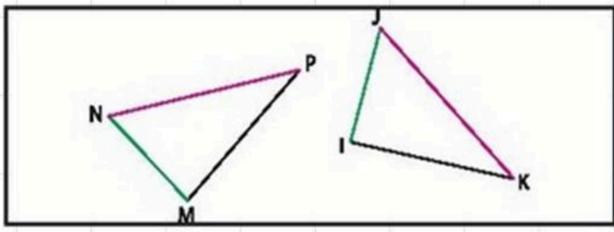
ج) قارن المثلثين ANB و AMC . استنتج أن CM = BN

تطبيق2:

لاحظ الشكل المقابل حيث ABCD متوازي الأضلاع وBM = DN.

بين أن AN = CM



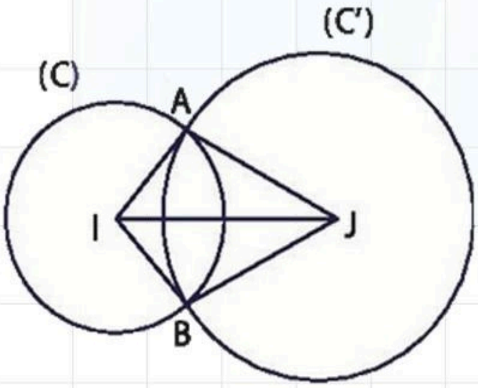
الحالة الثالثة : يتقايس مثلثان قائمان إذا قايست الأضلاع الثلاثة في أحدهما الأضلاع الثلاثة في الثاني مثنى مثنى.	

تطبيق 1 :

أ) أرسم متوازي الأضلاع ABCD . المستقيم المارّ من C والموازي للقطر [BD] يقطع المستقيم (AD) في النقطة E

ب) ما هي طبيعة الرباعي DBCE .

ج) استنتج تقايس المثلثين DCE و ABD .



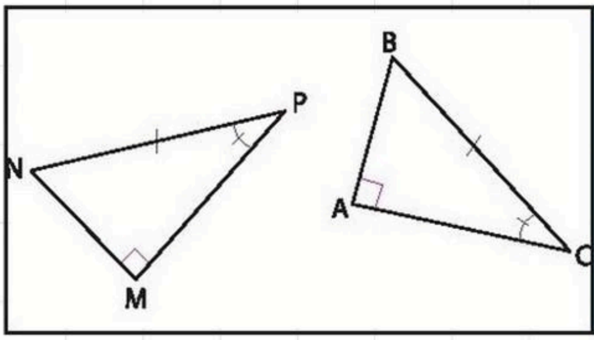
تطبيق 2 : تأمل الشكل المقابل.

ب) بين أن المثلثين BIJ و AIJ متقايسان.

ج) استنتج منصف الزاوية $\widehat{AIB}$ ومنصف الزاوية $\widehat{AJB}$

II - المثلثات القائمة :

الحالة الأولى : يتقايس مثلّثان قائمان إذا قايس الوتر وزاوية حادّة في أحدهما الوتر وزاوية حادّة في الثّاني.



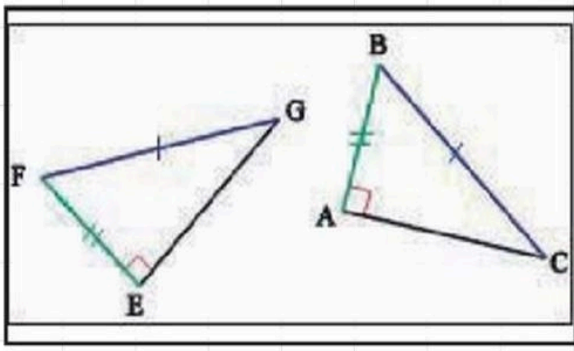
تطبيق :

أ) أرسم مثلّثا ABC متقايس الضلعين قمّته الرّئيسيّة A.

ب) أرسم الارتفاعين [BB'] و [CC']

ج) تأمّل الرّسم وحدّد مثلّثين متقايسين

ثمّ استنتج أنّ BB'=CC'

الحالة الثّانية : يتقايس مثلّثان قائمان إذا قايس الوتر وضلع قائم في أحدهما الوتر وضلعا قائما في الثّاني	

تطبيق :

1.أ) أرسم دائرة ج مركزها O ثمّ عيّن نقطتين A و B ينتميان إلى ج وغير متقابلين قطريّا.

ب) ابن المماسيّن لـ ج في A وB الّذين يتقاطعان في T.

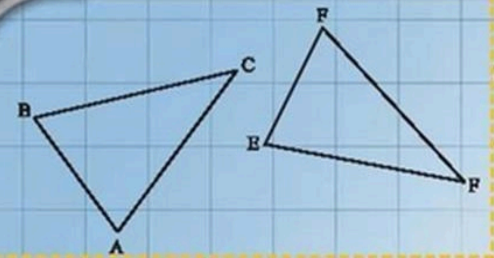
2.أ) بيّن أنّ TA = TB .

ب) استنتج أنّ (OT) هو الموسّط العمودي للقطعة [AB] .

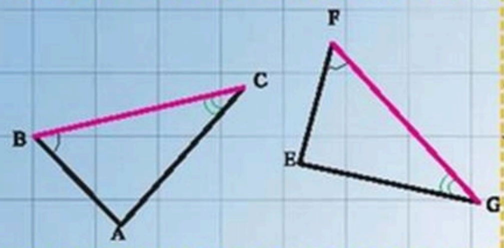
3. بيّن أنّ [TO) هو منصف الزّاوية $\widehat{ATB}$

أحوصل

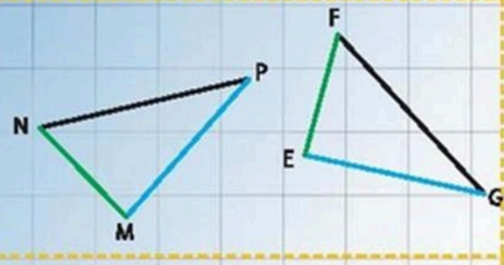
مثلّثان متقايسان هما مثلّثان أضلاعهما متقايسة مثنى مثنى وزواياهما متقايسة مثنى مثنى .



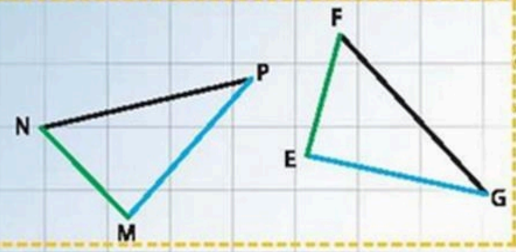
الحالة الأولى : يتقايس مثلثان إذا قايس ضلع و الزاويتان المجاورتان له في أحدهما ضلعا و الزاويتين المجاورتين له في الثاني.



الحالة الثانية : يتقايس مثلثان اذا قايس ضلعان والزاوية المحصورة بينهما في احدهما ضلعين والزاوية المحصورة بينهما في الثاني.

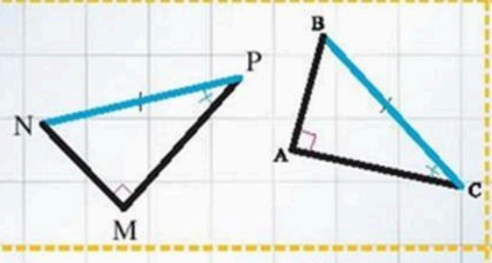


الحالة الثالثة : يتقايس مثلثان إذا قايست الأضلاع الثلاثة في أحدهما الاضلاع الثلاثة في الثاني مثنى مثنى

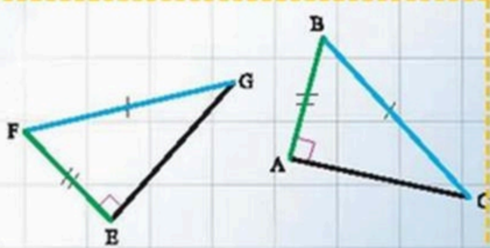


تقايس المثلّثات القائمة

الحالة الأولى : يتقايس مثلثان قائمان إذا قايس الوتر و زاوية حادة في أحدهما الوتر و زاوية حادة في الثاني.

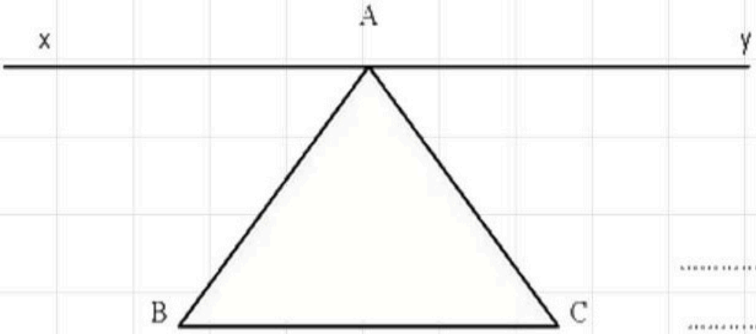


الحالة الثانية : يتقايس مثلثان قائمان إذا قايس الوتر و ضلع قائم في أحدهما الوتر و ضلعا قائما في الثاني.



تمرين رقم1:

ABC مثلث متقايس الضلعين في A



حيث : $\widehat{ABC}=50°$ و $(BC)//(xy)$

1) أحسب $\widehat{BAx}$

....

....

2) أ – عيـــن النقطتين I من [Ax] و J من [Ay] حيث : AI = AJ = 2cm

ب – قـــارن بين المثلثين : AJC و AIB

	التعليل
....	....
....	....
....	....

أستنتج..

ج – أستنتج أن : $\widehat{AIB}=\widehat{AJC}$

....

....

....

3) أ - منصف الزاوية $\widehat{AIB}$ يقطع [AB] في M .منصف الزاوية $\widehat{AJC}$ يقطع [AC] في N

ب – قـــارن بين المثلثين : AJN و AIM

	التعليل
....	....
....	....
....	....

أستنتج..

ج – أستنتج طبيعة المثلث AMN

....

....

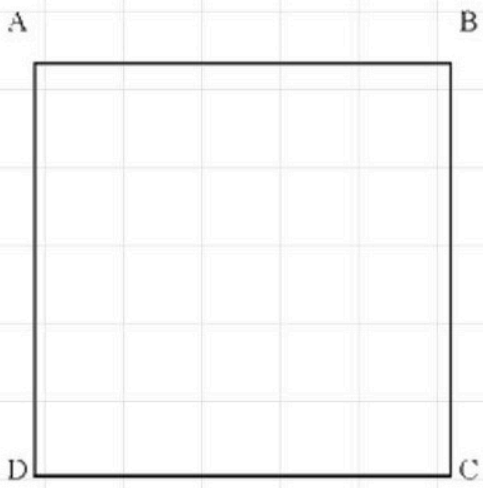
....

....

تمرين رقم 2 :

ABCD مربع قيس طول ضلعه 6cm .

E نقطة من [AB] و F نقطة من [BC]حيث AE=FC=2cm



1) أ- قارن المثلثين AED و DCF

....

....

....

....

ب – استنتج أن : $\widehat{ADE} = \widehat{FDC}$

....

....

2) المستقيم (AC) يقطع (DE) في O و (DF) في I

أ – قارن المثلثين AOD و DIC

....

....

....

....

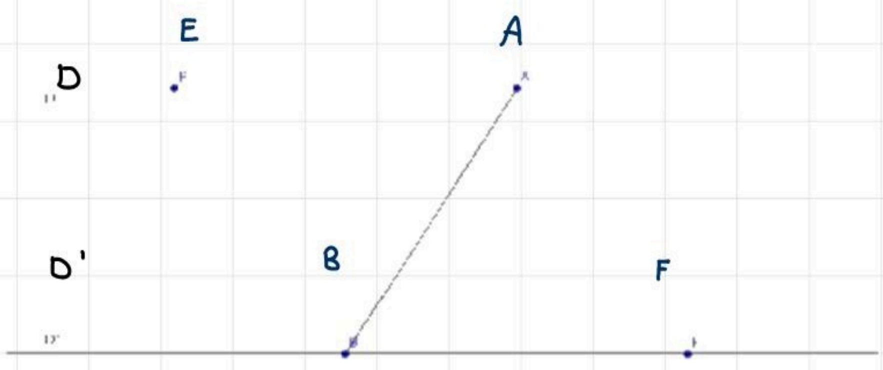
ب – أستنتج طبيعة المثلث DOI

....

....

....

تمرين رقم 3:



$D//D'$ (انظر الشكل)

$AE = BF$ و $A\hat{B}F = 48°$

1) أحسب $B\hat{A}E$

....

2) أ – قارن المثلثين ABE و AFB

....

....

....

....

ب – استنتج : $AF = BE$

....

....

3) لتكن I المسقط العمودي لـ F على [AB] و O المسقط العمودي لـ E على [AB]

أ – قارن المثلثين AOE و BFI

....

....

....

....

ب – استنتج : $OE = IF$

....

....

....