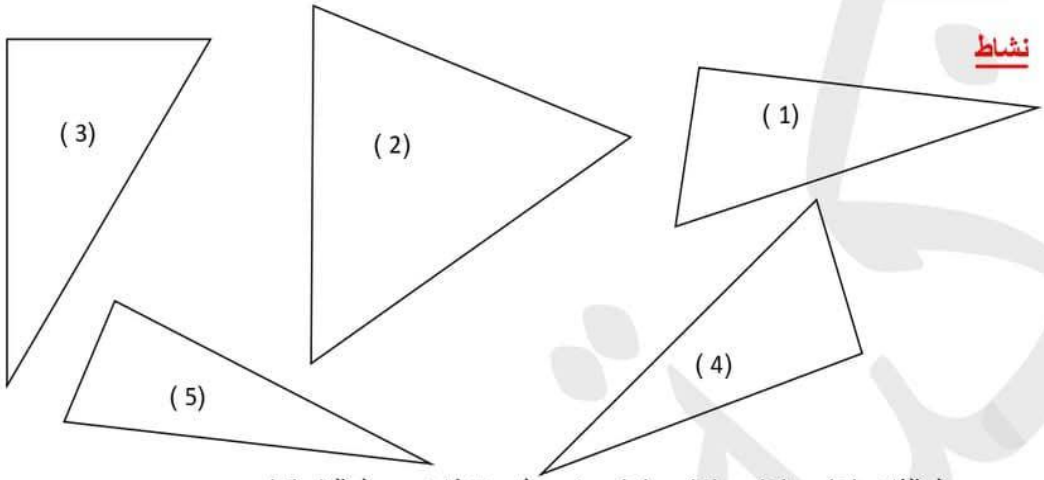
الأستاذة : الشريف	الدرس الثلث : تقايس المثلثات	الثامنة أساسي

I. تقايس المثلثات

نشاط



من بين المثلثات (2) و (3) و (4) و (5) ماهي التي تتطابق مع المثلث (1)

للإجابة على هذا السؤال يمكننا نقل المثلث (1) على ورق شفاف ثم نحاول مطابقته على بقية المثلثات

فنلاحظ مطابقة المثلثين (1) و (4)

المثلثين (1) و (4) قابلان للتطابق نقول أنهما متقايسين

عموما

مثلثان متقايسان هما مثلثان قابلان للتطابق

ملاحظة

ليكن ABC و EFG مثلثان متقايسان إذن هما قابلان للتطابق

و بالتالي كل ضلع من المثلث ABC يتطابق مع ضلع من المثلث EFG

ومنه كل ضلع من المثلث ABC يقايس ضلع من المثلث EFG و نقول أن أضلاع المثلثين تتقايس مثنى مثنى

كذلك كل زاوية من المثلث ABC تتطابق مع زاوية من المثلث EFG

ومنه كل زاوية من المثلث ABC تقايس زاوية من المثلث EFG و نقول أن زوايا المثلثين تتقايس مثنى مثنى

عموما

إذا تقايس مثلثان فإن

- أضلاعهما متقايسة مثنى مثنى
- زواياهما متقايسة مثنى مثنى

مصطلحات

في المثلثين المتقايسين النقاط القابلة للتطابق تسمى نقاط نظيرة

و الأضلاع القابلة للتطابق تسمى أضلاع نظيرة

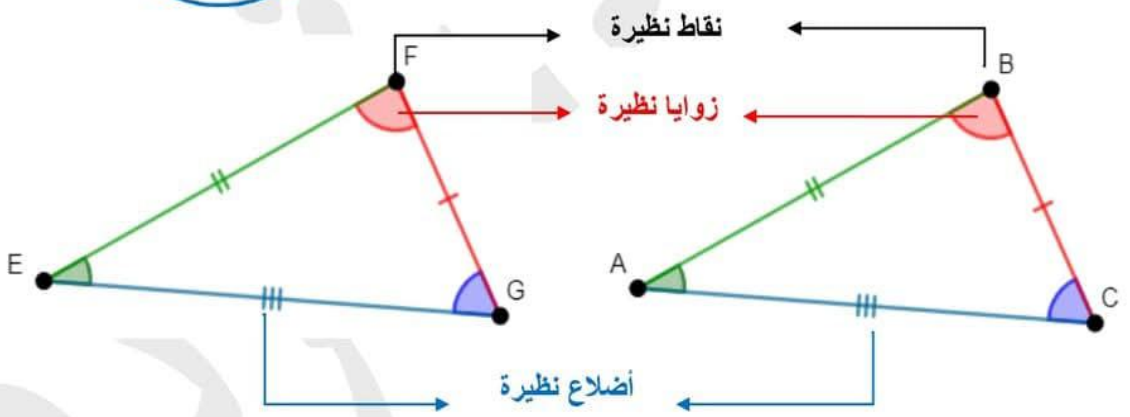
و الزوايا القابلة للتطابق تسمى زوايا نظيرة

ليكن ABC و EFG مثلثان متقايسان حيث النقاط A و B و C تطابق على التوالي على النقاط E و F و G فإن :

النقاط النظيرة: A نظيرة E ، و B نظيرة F ، و C نظيرة G

الأضلاع النظيرة: $[AB]$ نظير $[EF]$ ، و $[AC]$ نظير $[EG]$ ، و $[BC]$ نظير $[FG]$

الزوايا النظيرة: $A\hat{B}C$ نظيرة $E\hat{F}G$ ، و $B\hat{A}C$ نظيرة $F\hat{E}G$ ، و $A\hat{C}B$ نظيرة $E\hat{G}F$

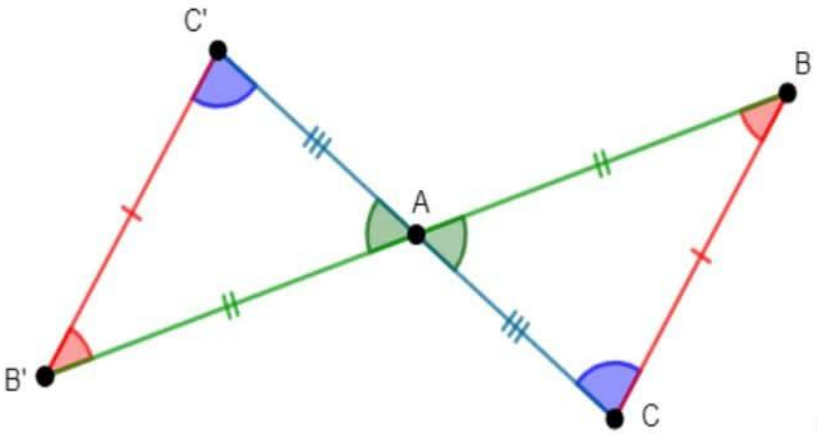


تمرين

ليكن ABC ابن B' و C' مناظرتي B و C على التوالي بالنسبة إلى النقطة A

1) بين أن $AB' = AB$ و $AC' = AC$ و $B'C' = BC$
2) بين أن $A\widehat{B'}C' = A\hat{B}C$ و $A\widehat{C'}B' = A\hat{C}B$ و $B'\hat{A}C' = B\hat{A}C$
3) بين أن المثلثين $AB'C'$ و ABC متقايسين

الإصلاح



1) بما أن B' مناظرة B بالنسبة إلى A فإن A منتصف $[BB']$ و بالتالي $AB' = AB$

بما أن C' مناظرة C بالنسبة إلى A فإن A منتصف $[CC']$ و بالتالي $AC' = AC$

بما أن B' مناظرة B
و C' مناظرة C
ونعلم أن التناظر المركزي يحافظ على البعد
فإن $B'C' = BC$

2) بما أن B' مناظرة B
و A مناظرة A
و C' مناظرة C
فإن الزاوية $B'\hat{A}C'$ مناظرة للزاوية $B\hat{A}C$

و نعلم أن التناظر المركزي يحافظ على أقيسة الزوايا فإن $B'\hat{A}C' = B\hat{A}C$

بما أن A مناظرة A
و B' مناظرة B
و C' مناظرة C
فإن الزاوية $A\widehat{B'}C'$ مناظرة للزاوية $A\hat{B}C$

و نعلم أن التناظر المركزي يحافظ على أقيسة الزوايا فإن $A\widehat{B'}C' = A\hat{B}C$

بما أن A مناظرة A
و B' مناظرة B
و C' مناظرة C
فإن الزاوية $A\widehat{C'}B'$ مناظرة للزاوية $A\hat{C}B$

و نعلم أن التناظر المركزي يحافظ على أقيسة الزوايا فإن $A\widehat{C'}B' = A\hat{C}B$

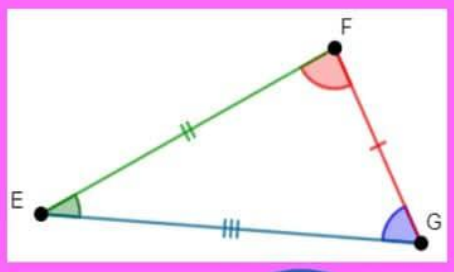
COLLEGE.MOURAJAA.COM

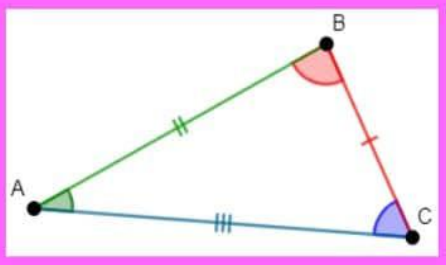
3) بما أن النقاط A وB' و C' مناظرات لـ A و B و C على التوالي بالنسبة إلى A فإن المثلثين ABC و $AB'C'$ متناظرين بالنسبة إلى النقطة A و بالتالي هما قابلان للتطابق عند الدوران بنصف دائرة حول النقطة A وبذلك هما متقايسان

في المثلثين ABC و $AB'C'$ الأضلاع متقايسة مثنى مثنى والزوايا متقايسة مثنى مثنى و هما متقايسان

تعريف

مثلثان متقايسان هما مثلثان تتقايس فيهما الأضلاع مثنى مثنى و الزوايا مثنى مثنى





II. حالات التقايس

1) الحالة الأولى

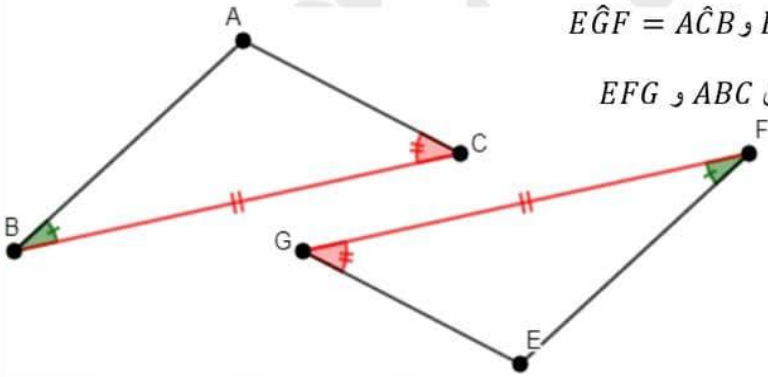
نشاط

في الرسم المقابل ABC مثلث

1) ابن المثلث EFG على وق شفاف حيث :

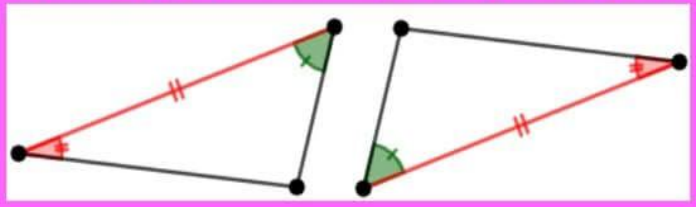
$FG = BC$ و $E\hat{F}G = A\hat{B}C$ و $E\hat{G}F = A\hat{C}B$

2) تحقق من تقايس المثلثين ABC و EFG



عموما (الحالة الأولى للتقايس)

يتقايس مثلثين إذا قايس فيهما ضلع و الزاويتان المجاورتان له في أحدهما ضلعا و الزاويتين المجاورتين له في الثاني مثنى مثنى

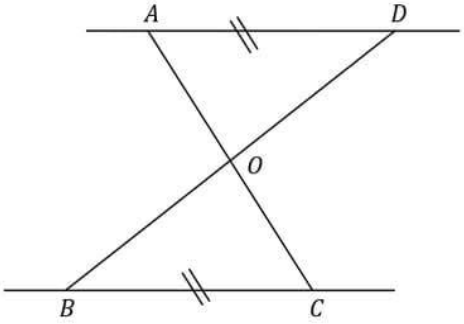


COLLEGE.MOURAJAA.COM

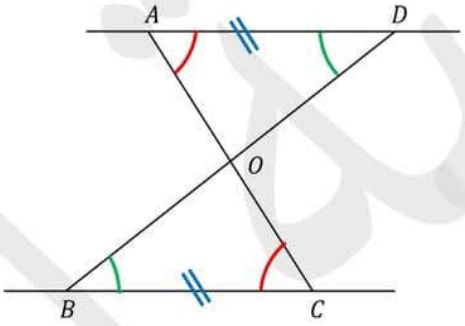
تمرين تطبيقي

تأمل الرسم التالي حيث $(AD)\ //\ (BC)$ و $AD = BC$
و (AC) و (BD) يتقاطعان في النقطة O

1) قارن المثلثين OAD و OBC
2) استنتج أن O منتصف $[AC]$ و $[BD]$



الإصلاح



1) بما أن الزاويتان $O\hat{A}D$ و $O\hat{C}B$ متبادلتان داخليا حاصلتان عن تقاطع (AC) مع المتوازيين (AD) و (BC) فهما متقايستان أي $O\hat{A}D = O\hat{C}B$

كذلك الزاويتان $O\hat{D}A$ و $O\hat{B}C$ متبادلتان داخليا حاصلتان عن تقاطع (BD) مع المتوازيين (AD) و (BC) فهما متقايستان أي $O\hat{D}A = O\hat{B}C$

في المثلثين OAD و OBC لدينا

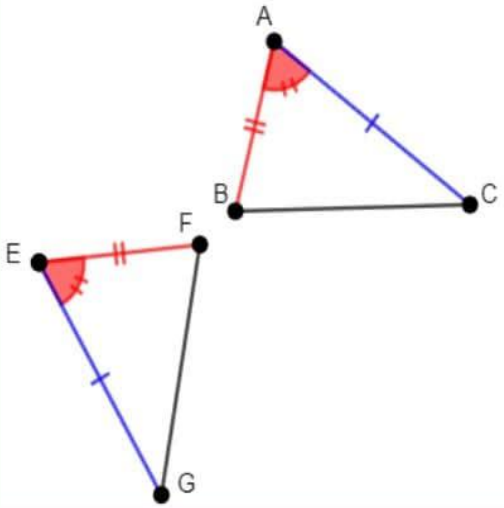
- $AD = BC$
- $O\hat{A}D = O\hat{C}B$
- $O\hat{D}A = O\hat{B}C$

إذن المثلثان OAD و OBC متقايسان حسب الحالة الأولى للتقايس

2) بما أن المثلثان ABC و ACD متقايسين فإن بقية العناصر النظيرة تكون متقايسة
النقاط النظيرة :

A	O	D
C	O	B

و بالتالي $OA = OC$ (أضلاع نظيرة)
و $OD = OB$ (أضلاع نظيرة)
بما أن النقاط O و A و C على نفس الإستقامة لأن (O نقطة من (AC)) و $OA = OC$
فإن O منتصف $[AC]$
بما أن النقاط O و B و D على نفس الإستقامة لأن (O نقطة من (BD)) و $OB = OD$
فإن O منتصف $[BD]$



2) الحالة الثانية

نشاط

في الرسم المقابل ABC مثلث

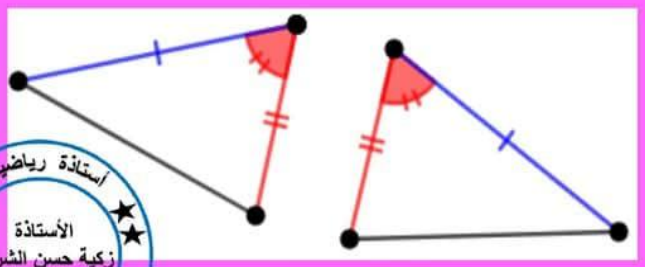
3) ابن المثلث EFG على وق شفاف حيث :

$EF = AB$ و $EG = AC$ و $F\hat{E}G = B\hat{A}C$

4) تحقق من تقايس المثلثين ABC و EFG

عموما (الحالة الثانية للتقايس)

يتقايس مثلثين إذا قايس فيهما ضلعان و الزاوية المحصورة بينهما في أحدهما ضلعين و الزاوية المحصورة بينهما في الثاني مثنى مثنى



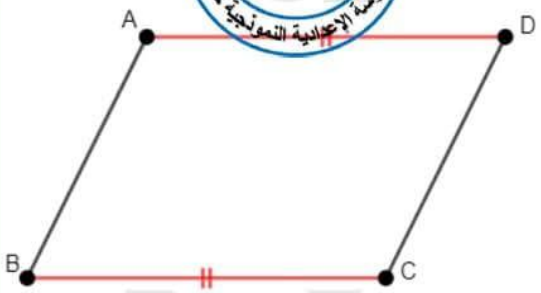
أستاذة رياضيات
الأستاذة
زكية حسن الشريف
المدرسة الإعدادية النموذجية خنشلة

تمرين تطبيقي

تأمل الرسم التالي حيث $(AD) // (BC)$ و $AD = BC$

3) قارن المثلثين ABC و ACD

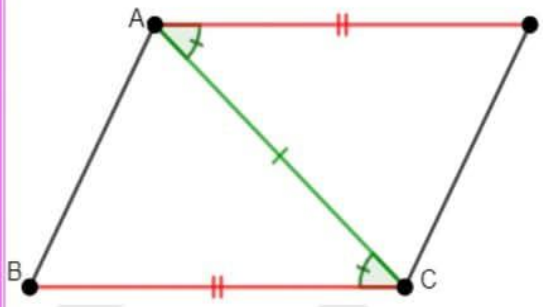
4) استنتج أن $(AB) // (CD)$



الإصلاح

1) الزاويتان $A\hat{C}B$ و $C\hat{A}D$ متبادلتان داخليا حاصلتان عن تقاطع (AC) مع المتوازيين (AD) و(BC)

فهما متقايستان أي $A\hat{C}B = C\hat{A}D$



في المثلثين ABC و ACD لدينا

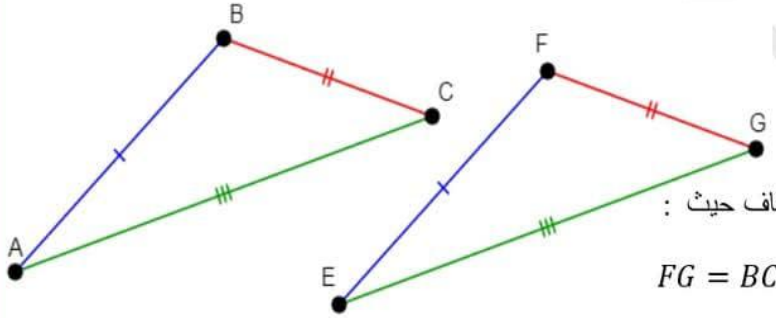
- $[AC]$ ضلع مشترك
- $AD = BC$
- $A\hat{C}B = C\hat{A}D$

إذن المثلثان ABC و ACD متقايسان حسب الحالة الثانية للتقايس

2) بما أن المثلثن ABC و ACD متقايسين فإن بقية العناصر النظيرة تكون متقايسة
النقاط النظيرة :

A	B	C
C	D	A

و بالتالي $C\hat{A}B = A\hat{C}D$ (زوايا نظيرة)
لدينا الزاويتان $A\hat{C}D$ و $C\hat{A}B$ متبادلتان داخليا ناتجتان عن تقاطع (AC) مع (AB) و(CD) وهما متقايستان إذن (AB) // (CD)



3) الحالة الثالثة

نشاط

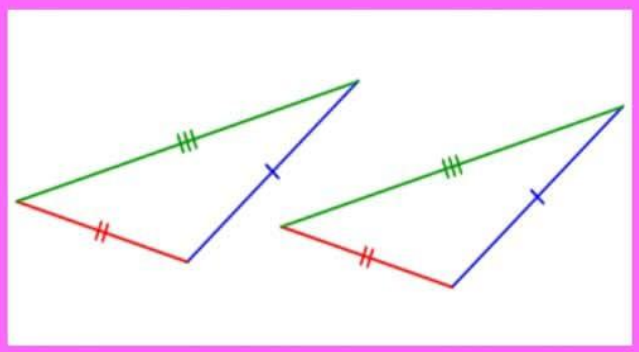
في الرسم المقابل ABC مثلث
1) ابن المثلث EFG على وق شفاف حيث :

$EF = AB$ و $EG = AC$ و $FG = BC$

2) تحقق من تقايس المثلثين ABC و EFG

عموما (الحالة الثالثة للتقايس)

يتقايس مثلثين إذا قايست فيهما الأضلاع الثلاثة في أحدهما ضلعين الأضلاع الثلاثة في الثاني مثنى مثنى



تمرين تطبيقي

ليكن $ABCD$ متوازي أضلاع قارن المثلثين ABC و ACD

الإصلاح

بما $ABCD$ متوازي أضلاع فإن كل ضلعين متقابلين متقايسين

في المثلثين ABC و ACD لدينا

- $[AC]$ ضلع مشترك
- $AB = CD$ (ضلعين متقابلين من متوازي الأضلاع)
- $AD = BC$ (ضلعين متقابلين من متوازي الأضلاع)

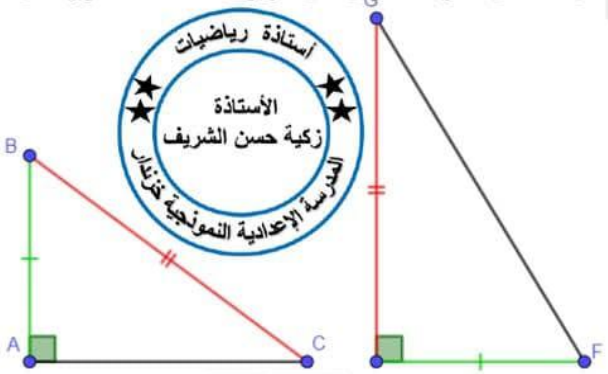
إذن المثلثين ABC و ACD متقايسان حسب الحالة الثالثة للتقايس

ملاحظة

- في كل هذه الحالات يوجد ثلاثة عناصر تتقايس في المثلثين يجب إظهارها لنستنتج أن المثلثين متقايسان
- موقع الزوايا والأضلاع التي تتقايس ومدى احترامها لشروط حالة التقايس الأولى أو الثانية خاصة ففي الحالة الأولى ضلع واحد والزاويتين المجاورتين لهذا الضلع
و في الحالة الثانية زاوية والضلعان اللذان يشكلان هذه الزاوية

مثال مضاد لتوضيح أهمية مكان العناصر التي تتقايس

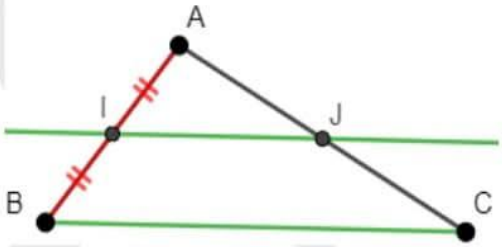
ABC و EFG مثلثان قائمان في A و E على التوالي حيث $EF = AB$ و $EG = BC$
و $F\hat{E}G = B\hat{A}C$ (زاوية قائمة) و لكن المثلثين غير متقايسين لأن الزاوية ليست محصورة بين الضلعين



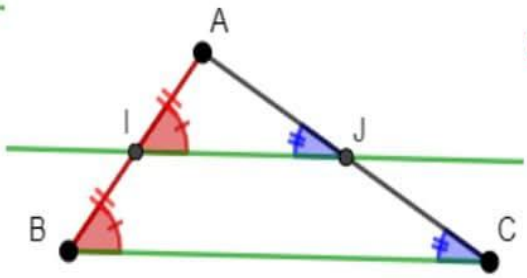
تمرين

ليكن ABC مثلثا و I منتصف $[AB]$
المستقيم المار من I و الموازي لـ (BC) يقطع $[AC]$ في النقطة J

1) بين أن $A\hat{I}J = A\hat{B}C$ و $A\hat{J}I = A\hat{C}B$
2) هل أن المثلثين ABC و AIJ متقايسان



الإصلاح



1) لدينا الزاويتين $A\hat{B}C$ و $A\hat{I}J$ متماثلتان حاصلتان عن تقاطع (AB) مع المتوازيين (BC) و (IJ) فهما متقايستان أي $A\hat{I}J = A\hat{B}C$

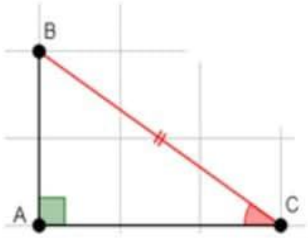
لدينا الزاويتين $A\hat{C}B$ و $A\hat{J}I$ متماثلتان حاصلتان عن تقاطع (AC) مع المتوازيين (BC) و (IJ) فهما متقايستان أي $A\hat{J}I = A\hat{C}B$

2) المثلثين ABC و AIJ ليسا متقايسان لأن أضلاعهما لا تتقايس مثنى مثنى رغم تقايس زواياهما مثنى مثنى

لتقايس مثلثان يكفي أن تتقايس فيهماالأضلاع مثى مثنى
و لا يكفي أن تتقايس فيهما الزوايا مثنى مثنى

III. الحالات الخاصة لتقايس المثلثات القائمة

1) الحالة الأولى

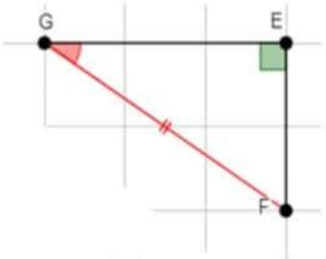


نشاط

في الرسم المقابل ABC مثلثا قائما في A

1) ابن المثلث EFG القائم في E على وق شفاف حيث :

$FG = BC$ و $E\hat{F}G = A\hat{B}C$



2) أ ـ بين أن $E\hat{G}F = A\hat{C}B$

ب ـ استنتج أن المثلثين ABC و EFG متقايسان

الإصلاح

2) أ ـ بما أن ABC مثلث قائم في A فإن $A\hat{C}B = 90° - A\hat{B}C$

و بما أن EFG مثلث قائم في E فإن $E\hat{G}F = 90° - E\hat{F}G$

و لنا $E\hat{F}G = A\hat{B}C$ (معطى)

إذن $90° - E\hat{F}G = 90° - A\hat{B}C$ و بالتالي $E\hat{G}F = A\hat{C}B$

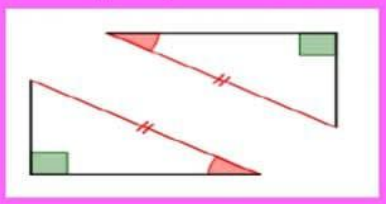
ب ـ في المثلثين ABC و EFG لدينا

- $FG = BC$ (معطى)
- و $E\hat{F}G = A\hat{B}C$ (معطى)
- و $E\hat{G}F = A\hat{C}B$ (مما سبق)

إذن هما متقايسان حسب الحالة الأولى للتقايس

عموما (الحالة الأولى لتقايس المثلثات القائمة)

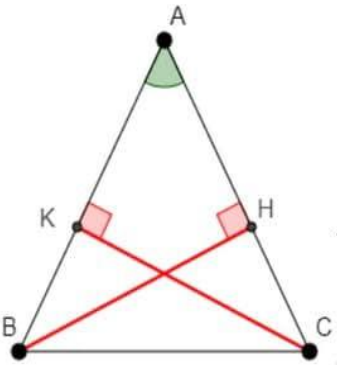
يتقايس مثلثان قائمان إذا قايس الوتر و زاوية حادة في أحدهما الوتر و زاوية حادة في الثاني



أستاذة رياضيات
الأستاذة
زكية حسن الشريف
المدرسة الإعدادية النموذجية خزندار

تمرين تطبيقي

ليكن ABC مثلثا متقايس الضلعين في A و H المسقط العمودي لـ B على (AC) و K المسقط العمودي لـ C على (AB)



1) أثبت تقايس المثلثين ABH و ACK

2) استنتج أن $BH = CK$

الإصلاح

1) بما أن H المسقط العمودي لـ B على (AC) فإن المثلث ABH قائم في H
و بما أن K المسقط العمودي لـ C على (AB) فإن المثلث ACK قائم في K
و $AB = AC$ (ABC مثلثا متقايس الضلعين في A)
و $B\hat{A}H = C\hat{A}K$ ($B\hat{A}H = C\hat{A}K = B\hat{A}C$ زاوية مشتركة)
إذن المثلثين ABH ACK متقايسان حسب الحالة الأولى لتقايس المثلثات القائمة

2) بما أن المثلثان ABH و ACK متقايسين فإن بقية العناصر النظيرة تكون متقايسة
النقاط النظيرة :

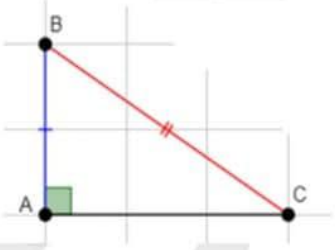
A	B	H
A	C	K

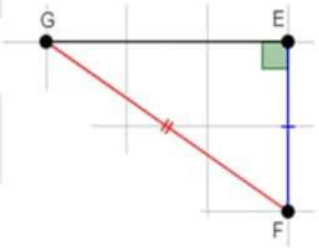
و بالتالي $BH = CK$ (أضلاع نظيرة)

2) الحالة الثانية

نشاط

في الرسم المقابل ABC مثلثا قائما في A





1) ابن المثلث EFG القائم في E على وق شفاف حيث :
$FG = BC$ و $EF = AB$

2) أ ـ تحقق أن أن $EG = AC$

ب ـ استنتج أن المثلثين ABC و EFG متقايسان

COLLEGE.MOURAJAA.COM

الإصلاح

2) أ ـ نتحقق باستعمال البركار أو المسطرة أن $EG = AC$

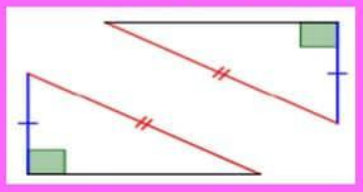
ب ـ في المثلثين ABC و EFG لدينا

- $FG = BC$ (معطى)
- $EF = AB$ و (معطى)
- $EG = AC$ و (مما سبق)

إذن هما متقايسان حسب الحالة الثالثة للتقايس

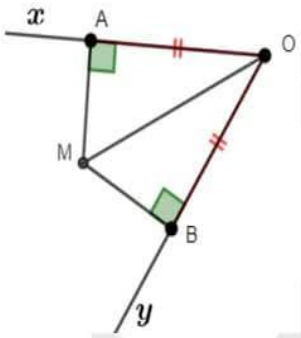
عموما (الحالة الثانية لتقايس المثلثات القائمة)

يتقايس مثلثان قائمان إذا قايس الوتر وضلع قائم في أحدهما الوتر و ضلع قائم في الثاني



تمرين تطبيقي

في الرسم التالي $x\hat{o}y$ زاوية و A و B نقطتين من $[ox)$ و $[oy)$ على التوالي حيث $OA = OB$ و $(MA) \perp [ox)$ و $(MB) \perp [oy)$



1) قارن المثلثين OAM و OBM

2) استنتج أن $[OM)$ منصف الزاوية $x\hat{o}y$

الإصلاح

1) المثلثان OAM و OBM قائمان في A و B على التوالي

$[OM]$ وتر مشترك

$OA = OB$ (معطى)

إذن حسب الحالة الثانية لتقايس المثلثات القائمة فإن المثلثان OAM و OBM متقايسان

2) بما أن المثلثان OAM و OBM متقايسين فإن بقية العناصر النظيرة تكون متقايسة

النقاط النظيرة :

O	A	M
O	B	M

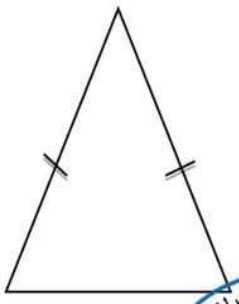
و بالتالي $B\hat{O}M = A\hat{O}M$ (زوايا نظيرة)

الزاويتان $A\hat{O}M$ و $B\hat{O}M$ متقايستان و متجاورتان في الضلع $[OM]$ يعني $[OM)$ منصف الزاوية $A\hat{O}B$ و لنا $x\hat{o}y = A\hat{O}B$ إذن $[OM)$ منصف الزاوية $x\hat{o}y$

COLLEGE.MOURAJAA.COM

المثلثات الخاصة

1) المثلث المتقايس الضلعين



هو مثلث له ضلعين متقايسين

نقطة تقاطع الضلعين المتقايسين تسمى القمة الرئيسية للمثلث

والضلع المقابل للقمة الرئيسية يسمى قاعدة المثلث

ABC مثلثا متقايس الضلعين قمته الرئيسية A يعني $AB = AC$
و $[BC]$ قاعدة المثلث

أستاذة رياضيات
الأستاذة
زكية حسن الشريف
المدرسة الإعدادية النموذجية تزنكار

نشاط 1

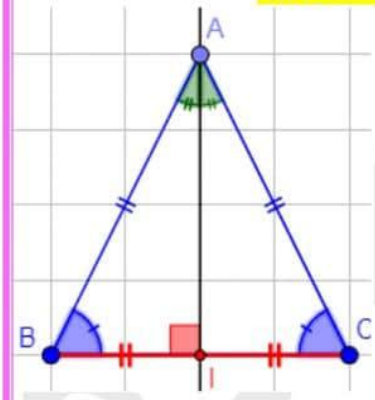
ليكن ABC مثلثا متقايس الضلعين قمته الرئيسية A و I منتصف $[BC]$

1) أ ـ بين أن (AI) هو الموسط العمودي لقطعة المستقيم $[BC]$
ب ـ ماذا تمثل $[AI]$ بالنسبة للمثلث ABC إذن هما متقايسان حسب الحالة الثالثة للتقايس
2) قارن المثلثين ABI و ACI
3) استنتج أن $[AI]$ منصف الزاوية $B\hat{A}C$ و أن $A\hat{B}C = A\hat{C}B$

الإصلاح

1) أ ـ بما أن ABC مثلث متقايس الضلعين قمته الرئيسية A
فإن $AB = AC$ و بالتالي A نقطة من الموسط العمودي ل$[BC]$ و I منتصف $[BC]$
إذن (AI) هو الموسط العمودي لقطعة المستقيم $[BC]$

ب ـ بما إن I منتصف $[BC]$ فإن $[AI]$ تمثل الموسط الصادر من A في للمثلث ABC



و بما أن (AI) هو الموسط العمودي لقطعة المستقيم $[BC]$
فإن $[AI]$ تمثل الإرتفاع الصادر من A في للمثلث ABC

2) في المثلثين ABI و ACI لدينا
- $[AI]$ ضلع مشترك
- و $AB = AC$ (ABC مثلث متقايس الضلعين قمته الرئيسية A)
- و $BI = CI$ (I منتصف $[BC]$)

إذن المثلثين ABI و ACI متقايسان حسب الحالة الثالثة للتقايس
3) بما أن المثلث ABI و ACI متقايسين فإن بقية العناصر النظيرة تكون متقايسة
النقاط النظيرة :

A	B	I
A	C	I

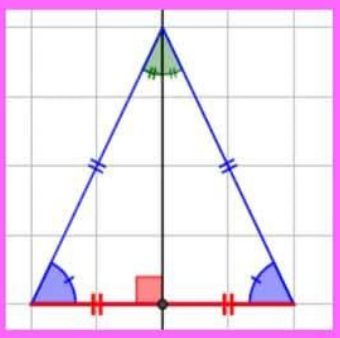
و بالتالي $I\hat{A}B = I\hat{A}C$ (زوايا نظيرة)
و $A\hat{B}I = A\hat{C}I$ (زوايا نظيرة)

COLLEGE.MOURAJAA.COM

الزاويتان $I\hat{A}B$ و $I\hat{A}C$ متقايستان و متجاورتان في الضلع $[AI]$ يعني $[AI]$ منصف الزاوية $B\hat{A}C$
$A\hat{B}I = A\hat{C}I$ و $A\hat{B}C = A\hat{B}I$ و $A\hat{C}B = A\hat{C}I$ إذن $A\hat{B}C = A\hat{C}B$

عموما

في المثلث المتقايس الضلعين :



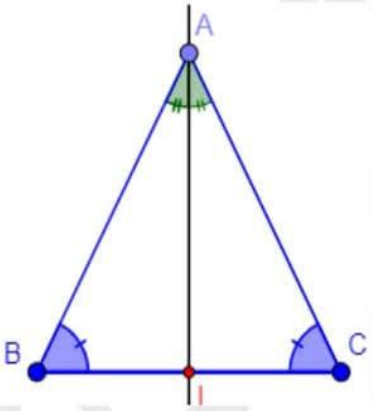
- الموسط العمودي للقاعدة يمر من القمة الرئيسية
- الموسط العمودي للقاعدة يحمل كلا من منصف الزاوية الرئيسية والارتفاع والموسط الموافقين للقاعدة
- الموسط العمودي للقاعدة يمثل محور تناظر للمثلث
- الزاويتان المجاورتان للقاعدة متقايستين

نشاط 2

ليكن ABC مثلثا حيث $A\hat{B}C = A\hat{C}B$ و $[AI]$ منصف الزاوية $B\hat{A}C$ يقطع $[BC]$ في النقطة I

1) أ - بين أن $A\hat{I}C = A\hat{I}B$
2) قارن المثلثين ABI و ACI
3) استنتج أن المثلث ABC متقايس الضلعين قمته الرئيسية A

الإصلاح



1) لدينا $[AI]$ منصف الزاوية $B\hat{A}C$ إذن $I\hat{A}B = I\hat{A}C$
و نعلم أن مجموع أقيسة زوايا المثلث يساوي $180°$ إذن

$$A\hat{I}B = 180° - (A\hat{B}I + I\hat{A}B)$$
$$= 180° - (A\hat{B}C + I\hat{A}C) \quad (A\hat{B}I = A\hat{B}C \text{ و } I\hat{A}B = I\hat{A}C)$$
$$= 180° - (A\hat{C}B + I\hat{A}C) \quad (A\hat{B}C = A\hat{C}B)$$
$$= 180° - (A\hat{C}I + I\hat{A}C) \quad (A\hat{C}B = A\hat{C}I)$$
$$= A\hat{I}C$$

إذن $A\hat{I}C = A\hat{I}B$

2) في المثلثين ABI و ACI لدينا
- $[AI]$ ضلع مشترك
- و $A\hat{I}C = A\hat{I}B$ (مما سبق)
- و $A\hat{B}I = A\hat{C}I$ ($A\hat{B}C = A\hat{C}B$)

إذن المثلثين ABI و ACI متقايسان حسب الحالة الأولى للتقايس

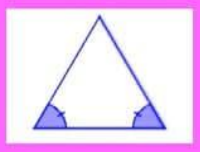
3) بما أن المثلثان ABI و ACI متقايسين فإن بقية العناصر النظيرة تكون متقايسة
النقاط النظيرة :

A	B	I
A	C	I

و بالتالي $AB = AC$ (أضلاع نظيرة)
$AB = AC$ يعني المثلث ABC متقايس الضلعين في A

عموما

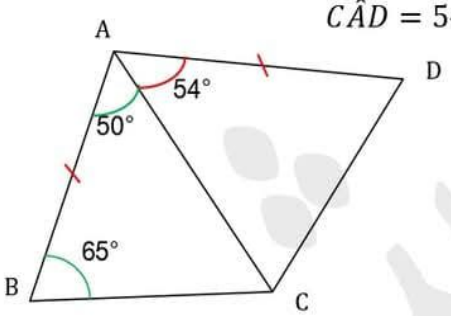
كل مثلث له زاويتان متقايستان هو مثلث متقايس الضلعين



أستاذة رياضيات
الأستاذة
زكية حسن الشريف
المدرسة الإعدادية النموذجية خزدار

تمرين تطبيقي

تامل الرسم التالي حيث $A\hat{B}C = 65°$ و $B\hat{A}C = 50°$ و $C\hat{A}D = 54°$



1) بين أن المثلث ABC متقيس الضلعين
2) أحسب $A\hat{D}C$

الإصلاح

1) نعلم أن مجموع أقيسة زوايا المثلث يساوي $180°$

إذن $A\hat{C}B = 180° - (B\hat{A}C + A\hat{B}C)$

$= 180° - (50° + 65°)$

$= 180° - 115° = 65°$

إذن $A\hat{C}B = 110°$

و بالتالي المثلث ABC له زاويتين متقايستان $(A\hat{B}C = A\hat{C}B)$
فهو متقايس الضلعين قمته الرئيسية A

2) $A\hat{D}C = ؟$

بما أن المثلث ABC متقايس الضلعين قمته الرئيسية A

فإن $AB = AC$

و لنا $AB = AD$ (معطى) إذن $AC = AD$

و منه المثلث ACD متقايس الضلعين قمته الرئيسية A

و بالتالي $A\hat{C}D = A\hat{D}C$ (الزاويتان المجاورتين للقاعدة متقايستان)

COLLEGE.MOURAJAA.COM

و نعلم أن مجموع أقيسة زوايا المثلث يساوي $180°$

إذن $A\hat{C}D + A\hat{D}C = 180° - C\hat{A}D$

$= 180° - 54° = 126°$

و بالتالي $A\hat{C}D = A\hat{D}C = \frac{126°}{2} = 63°$

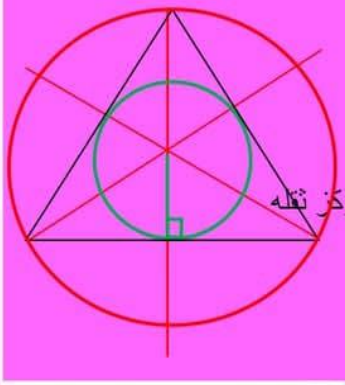
2) المثلث المتقايس الأضلاع

هو مثلث أضلاعه متقايسة

ABC مثلثا متقايس الأضلاع قمته الرئيسية A يعني $AB = AC = BC$ و بالتالي له كل خاصيات المثلث المتقايس الضلعين في A أو في B أو في C و بالتالي

الخاصيات و الخاصيات المعاكسة

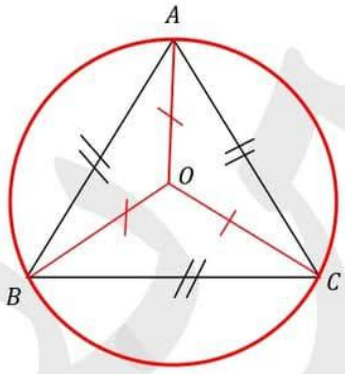
في المثلث المتقايس الأضلاع :



- الموسط العمودي لكل ضلع يمر من الرأس المقابل
- الموسط العمودي لكل ضلع يحمل كلا من منصف الزاوية والارتفاع والموسط
- مركز الدائرة المحيطة به هي مركز الدائرة المحاطة به هي مركزه القائم هي مركز ثقله
- الموسطات العمودية لأضلاعه تمثل محاور تناظر للمثلث
- زواياه متقايسة و قيس كل واحدة $60°$

تمرين تطبيقي

ليكن ABC مثلثا متقايس الأضلاع و O مركز للدائرة المحيطة به



قارن المثلثات AOB و AOC و BOC

الإصلاح

بما أن O مركز للدائرة المحيطة بالمثلث ABC

فإن $OA = OB = OC$

و بما أن ABC مثلثا متقايس الأضلاع فإن $AB = AC = BC$

في المثلثين AOB و AOC لدينا

إذن المثلثين AOB و AOC متقايسان حسب الحالة الثالثة للتقايس

- $[OA]$ ضلع مشترك
- $OB = OC$
- $AB = AC$

COLLEGE.MOURAJAA.COM

بنفس الطريقة نثبت أن المثلثين AOC وBOC متقايسان
و بالتالي المثلثات AOB وAOC وBOC متقايسة

كل مثلث زواياه متقايسة هو مثلث متقايس الأضلاع

نشاط

ليكن ABC مثلثا متقايس الضلعين قمته الرئيسية A حيث $B\hat{A}C = 60°$

بين أن المثلث ABC متقايس الأضلاع

الإصلاح

بما أن ABC مثلثا متقايس الضلعين قمته الرئيسية A فإن $A\hat{B}C = A\hat{C}B$

و نعلم و نعلم أن مجموع أقيسة زوايا المثلث يساوي $180°$ إذن

$$\left(A\hat{B}C + A\hat{C}B\right) = 180° - B\hat{A}C = 180° - 60° = 120°$$

و بالتالي $A\hat{B}C = A\hat{C}B = \frac{120°}{2} = 60°$

المثلث ABC زواياه متقايسة ($B\hat{A}C = A\hat{B}C = A\hat{C}B = 60°$) فهو متقايس الأضلاع

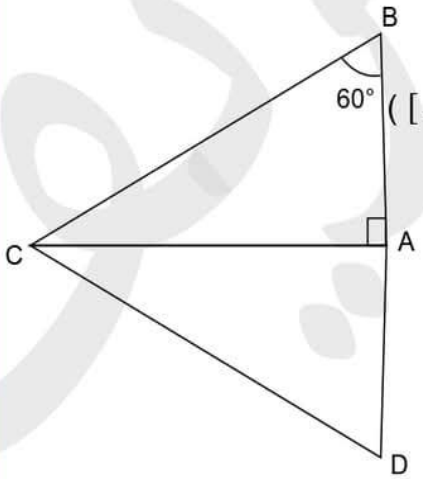
عموما

كل مثلث متقايس الضلعين و له زاوية قيسها $60°$ هو مثلث متقايس الأضلاع

تمرين تطبيقي

1) ارسم مثلثا ABC قائم الزاوية في A حيث $AB = 3cm$ و $A\hat{B}C = 60°$
2) لتكن D مناظرة B بالنسبة إلى A بين أن BCD متقايس الأضلاع و استنتج CD

الإصلاح



2) بما أن D مناظرة B بالنسبة إلى A فإن A منتصف $[BD]$

و $(BD) \perp (AC)$ (لأن ABC قائم الزاوية في A وD من $[AB]$)

فإن (AC) الموسط العمودي لـ $[BD]$ و بالتالي $CB = CD$

و منه المثلث BCD متقايس الضلعين في C

و بما أن له زاوية قيسها $60°$ ($C\hat{B}D = A\hat{B}C = 60°$)

فهو مثلث متقايس الأضلاع

$CD = ؟$

بما أن BCD متقايس الأضلاع فإن $BC = DB = CD$

و لنا D مناظرة B بالنسبة إلى A إذن $DB = 2AB$

و $AB = 3cm$ (معطى) إذن $DB = 2AB = 2 \times 3 = 6cm$

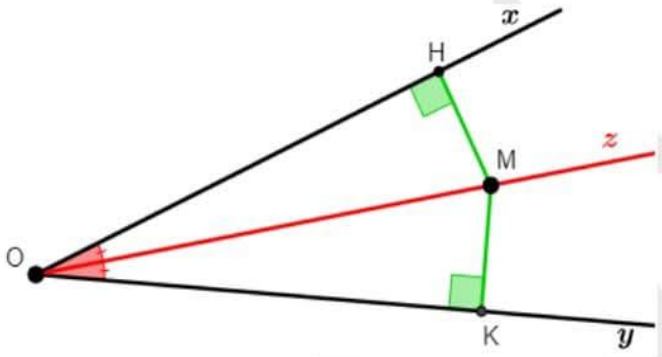
$DB = 6cm$ إذن $CD = 6cm$

أستاذة رياضيات
الأستاذة
زكية حسن الشريف
المدرسة الإعدادية النموذجية فرنتار

الخاصية المميزة لمنصف الزاوية

نشاط 1

1) أرسم زاوية $x\hat{o}y$ وابن $[oz)$ منصفها
2) ا- عين نقطة M من $[oz)$ ثم حدد H و K المساقط العمودية لـ M على $[ox)$ و $[oy)$ على التولي
3) أ - قارن المثلثين OMH و OMK
ب - استنتج أن $MH = MK$



الإصلاح

3) أ - بما أن H المسقط العمودي لـ M على (Ox) فإن المثلث OMH قائم في H
و بما أن K المسقط العمودي لـ M على (Oy) فإن المثلث OMK قائم في K
و $[OM]$ (وتر مشترك)
و $M\hat{O}H = M\hat{O}K$ ($[oz)$ منصف $x\hat{o}y$ و H و K و M نقاط من $[ox)$ و $[oy)$ و $[oz)$ على التوالي)
إذن المثلثين ABH ACK متقايسان حسب الحالة الأولى لتقايس المثلثات القائمة

ب - بما أن المثلثان ABH و ACK متقايسين فإن بقية العناصر النظيرة تكون متقايسة

النقاط النظيرة :

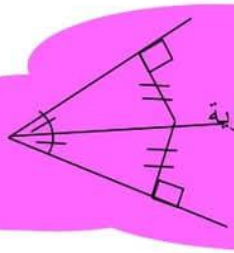
O	M	H
O	M	K

و بالتالي $MH = MK$ (أضلاع نظيرة)

ملاحظة

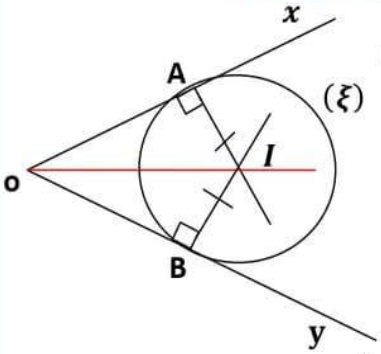
بعد M عن $[ox)$ هو البعد MH وبعد M عن $[oy)$ هو البعد MK

عموما



كل نقطة من منصف الزاوية تكون متقايسة البعد عن ضلعي الزاوية

نشاط 2



في الرسم التالي (ξ) دائرة مركزها I و [ox] و[oy] مماسان للدائرة (ξ)

في النقطتين A و B على التوالي

1) قارن المثلثين OAI و OBI

2) استنتج أن $[OI]$ هو منصف الزاوية $x\hat{o}y$

الإصلاح

1) بما أن [ox] و[oy] مماسان للدائرة (ξ) في النقطتين A و B على التوالي

فإن المثلثين OAI و OBI قائمان في A و B على التوالي

$[OI]$ وتر مشترك

$IA = IB$ (النقطتين A و B من الدائرة (ξ)التي مركزها I)

إذن حسب الحالة الثانية لتقايس المثلثات القائمة فإن المثلثين OAI و OBI متقايسان

2) بما أن المثلث OAI و OBI متقايسين فإن بقية العناصر المتدرة تكون متقايسة

النقاط النظيرة :

O	A	I
O	B	I

و بالتالي $B\hat{O}I = A\hat{O}I$ (زوايا نظيرة)

الزاويتان $A\hat{O}I$ و $B\hat{O}I$ متقايستان و متجاورتان في الضلع $[OI]$ يعني $[OI]$ منصف الزاوية $A\hat{O}B$

و لنا $x\hat{o}y = A\hat{O}B$ إذن $[OI]$ منصف الزاوية $x\hat{o}y$

ملاحظة

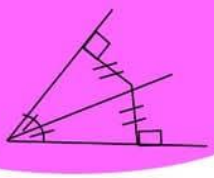
النقطتين A و B من الدائرة (ξ)التي مركزها I إذن $IA = IB$

بما أن [ox] و [oy] مماسان للدائرة (ξ) في A و B على التوالي فإن بعد I عن [ox] وعن [oy] يساوي شعاع الدائرة وبالتالي بعد I عن [ox] يساوي بعد I عن [oy]

و منه I متقايسة البعد عن [ox] و $[oy)$

عموما

كل نقطة متقايسة البعد عن ضلعي الزاوية هي نقطة من منصف الزاوية



من النشاط 1 و 2 نستنتج

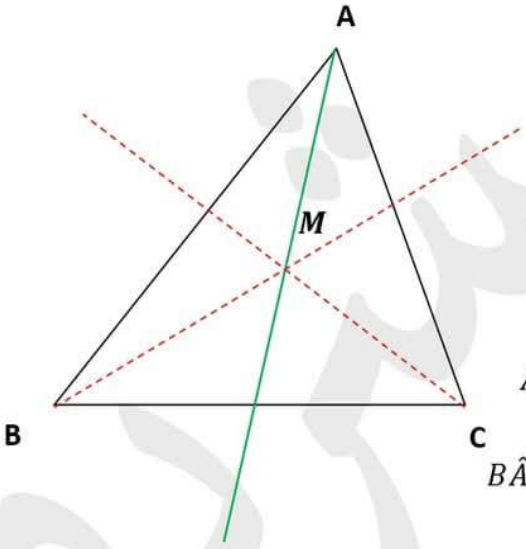
منصف الزاوية هو مجموعة النقاط من الزاوية المتساوية البعد عن ضلعيها

تمرين تطبيقي

1) أ ـ ابن المثلث ABC حيث $BC = 4cm$ و $A\hat{B}C = 40°$ و $A\hat{C}B = 80°$
2) أحسب $B\hat{A}C$
3) أ ـ ابن منصفي الزاويتين $A\hat{B}C$ و $A\hat{C}B$ و عين M نقطة تقاطعهما

ب ـ أحسب $M\hat{A}C$ و $A\hat{M}C$

الإصلاح



2) $B\hat{A}C = ?$

نعلم أن مجموع أقيسة زوايا المثلث يساوي $180°$

إذن $\hat{AC} = 180° - (A\hat{B}C + A\hat{C}B)$

$= 180° - (40° + 80°)$

$= 180° - 120° = 60°$ إذن $B\hat{A}C = 60°$

3) $M\hat{A}C = ?$

بما أن M نقطة تقاطع منصفي الزاويتين $A\hat{B}C$ و $A\hat{C}B$

فإن منصف الزاوية $B\hat{A}C$ يمر أيضا من M

و بالتالي نصف المستقيم $[AM)$ هو منصف الزاوية $B\hat{A}C$

و منه $M\hat{A}C = M\hat{A}B = \frac{B\hat{A}C}{2} = \frac{60°}{2} = 30°$

إذن $M\hat{A}C = 30°$

$A\hat{M}C = ?$

بما أن نصف المستقيم $[CM)$ منصف الزاوية $A\hat{C}B$

فإن $M\hat{C}A = M\hat{C}B$

$= \frac{A\hat{C}B}{2} = \frac{80°}{2} = 40°$

إذن $M\hat{C}A = 40°$

COLLEGE.MOURAJAA.COM

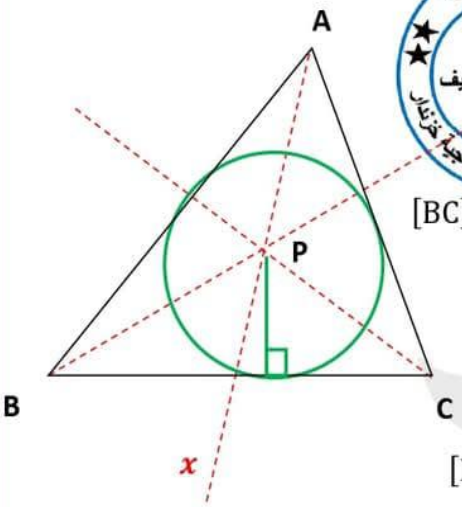
و بما أن مجموع أقيسة زوايا المثلث يساوي $180°$

إذن $A\hat{M}C = 180° - (M\hat{A}C + M\hat{C}A)$

$= 180° - (40° + 30°)$

إذن $= 180° - 70° = 110°$ $\quad A\hat{M}C = 110°$

نشاط



1) ارسم مثلثا ABC
2) ابن $[Ax)$ منصف الزاوية $B\hat{A}C$
3) ابن $[By)$ منصف الزاوية $A\hat{B}C$
4) عين النقطة P تقاطع $[Ax)$ و $[By)$
5) بين أن P لها نفس البعد عن الأضلاع [AB] و [AC] و [BC]

الإصلاح

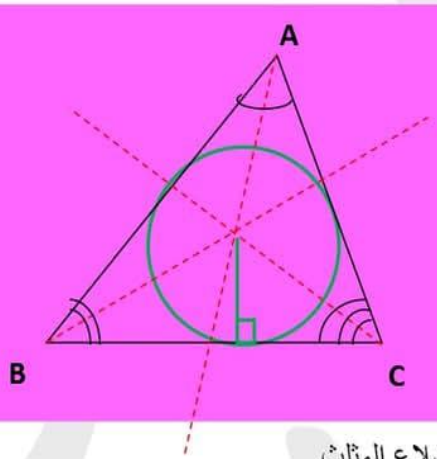
5) بما أن P نقطة من $[Ax)$ منصف الزاوية $B\hat{A}C$
فإن P متساوية البعد عن ضلعي الزاوية $[AB)$ و$[AC)$
كذلك P نقطة من $[By)$ منصف الزاوية $A\hat{B}C$
فإن P متساوية البعد عن ضلعي الزاوية $[BA)$ و$[BC)$
وبالتالي P لها نفس البعد عن الأضلاع [AB] و [AC] و [BC]

تعريف

انصاف المستقيمات $[Ax)$ و $[By)$ و $[Cz)$ تسمى منصفات المثلث ABC

بما أن P متساوية البعد عن الأضلاع $[BA)$ و$[BC)$ و $[CA)$
فإن P متساوية البعد عن أضلاع المثلث [AB] و [AC] و [BC]
وبالتالي P مركز للدائرة المماسة لأضلاع المثلث ABC و تسمى الدائرة المحاطة بالمثلث ABC

عموما



للمثلث ثلاثة منصفات و هي منصفات زواياه
تتقاطع منصفات المثلث في نقطة واحدة
تسمى مركز الدائرة المحاطة بالمثلث
(و هي الدائرة المماسة لأضلاع المثلث)

- مركز الدائرة المحاطة بالمثلث هي نقطة متقايسة البعد عن أضلاع المثلث
- لنتحصل على مركز الدائرة المحاطة بالمثلث يكفي تقاطع منصفين منه
- شعاع الدائرة المحاطة بالمثلث هو بعد المركز عن أحد الأضلاع
- كل نصف مستقيم ينطلق من رأس المثلث و مركز الدائرة المحاطة به هومنصف زاوية

مرحبا بكم على منصة مراجعة

موقع مراجعة
mourajaa.com

موقع مراجعة سنوات الاعدادي

COLLEGE.MOURAJAA.COM

أخبار التعليم في تونس

NEWS.MOURAJAA.COM