5-الترتيب والمقارنة في مجموعة الأعداد الحقيقية

مراجعة عامة

1) ليكن a و b عددين حقيقيين: * $a-b\le 0$ يعني $a\le b$، * $a-b\ge 0$ يعني $a\ge b$.
2) لتكن a، b و c ثلاثة أعداد حقيقية: $(a\ge b)$ يعني $(a+c\ge b+c)$.
3) لتكن a، b، c و d أربعة أعداد حقيقية: إذا كان $a\le b$ و $c\le d$ فإن $a+c\le b+d$
4) ليكن a و b عددين حقيقيين: * إذا كان c عددا حقيقيا موجبا قطعا فإن $a\le b$ يعني $ac\le bc$
* إذا كان c عددا حقيقيا سالبا قطعا فإن $a\le b$ يعني $ac\ge bc$.
5) ليكن a و b عددين حقيقيين مخالفين للصفر ولهما نفس العلامة: إذا كان $a\le b$ يعني $\frac{1}{a}\ge\frac{1}{b}$
6) ليكن a و b عددين حقيقيين: * إذا كان a و b عددين موجبين فإن: $a\le b$ يعني $a^2\le b^2$
* .إذا كان a و b عددين سالبين فإن: $a\le b$ يعني $a^2\ge b^2$.
7) ليكن a و b عددين حقيقيين: $|a|\le|b|$ يعني $a^2\le b^2$.
8) ليكن a و b عددين حقيقيين موجبين $a\le b$ يعني $\sqrt{a}\le\sqrt{b}$.

التمارين

تمرين عدد 01 : قارن بين a و b في كل حالة من الحالات التالية: أ) $a=\frac{6}{7}\ ;\ b=\frac{5}{6}$ ، ب) $a=-\frac{9}{11}\ ;\ b=-\frac{7}{9}$

ج) $a=-1.7\ ;\ b=-\sqrt{3}$ ، د) $a=\pi-\frac{6}{5}\ ;\ b=\pi-\frac{8}{7}$ ، ه) $a=\sqrt{7}-5\sqrt{2}\ ;\ b=\sqrt{7}-3\sqrt{2}$

و) $a=\frac{-3\sqrt{2}}{5}\ ;\ b=\frac{-2\sqrt{2}}{3}$ ، ي) $a=\frac{-\sqrt{13}-1}{5}\ ;\ b=\frac{\sqrt{5}-1}{2}$

تمرين عدد 02: ضع العلامة ☒ أمام المقترح السليم:

1) إذا كان $(a-b)\in IR_-$ فإن: ☐ $a+\sqrt{2}\le b+\sqrt{2}$ ، ☐ $a+\sqrt{5}\ge b+\sqrt{5}$ ، ☐ $a^2-1\ge 2$

2) إذا كان $a\in IR^*$ و $b\in IR^*$ و $ab\in IR_+$ و $(a-b)\in IR_+$ فإن: ☐ $-\frac{1}{a}\ge-\frac{1}{b}$ ، ☐ $-\frac{1}{a}\le-\frac{1}{b}$ ، ☐ $-a\ge -b$

3) إذا كان $a\in IR$ و $b\in IR$ و $c\in IR_-$ و $a-b\le 0$ فإن:
☐ $ac+\sqrt{5}\ge bc+\sqrt{5}$ ، ☐ $ac+\pi\le bc+\pi$ ، ☐ $-ac\ge -bc$

4) إذا كان $a\le-\sqrt{3}$ فإن: ☐ $a^2\le 3$ ، ☐ $a^2\ge 3$ ، ☐ $a-\pi\ge b-\pi$

تمرين عدد 03: a و b عددان حقيقيان بحيث $a-b\le 0$ قارن بين x و y في كل حالة من الحالات التالية:
أ) $x=a-\sqrt{3}\ ;\ y=b-\sqrt{2}$ ، ب) $x=-a-\pi\ ;\ y=-b-2\pi$ ، ج) $x=2a-3\sqrt{2}\ ;\ y=2\left(b-\sqrt{2}\right)$

تمرين عدد 04: نعتبر عددين حقيقيين x و y بحيث $x\le y$ قارن بين a و b في كل حالة من الحالات التالية:

أ) : $a=x\frac{\sqrt{5}}{3}\ ;\ b=y\frac{\sqrt{5}}{3}$ ، ب) $a=-\frac{\pi}{3}x\ ;\ b=-\frac{\pi}{3}y$

ج) $a=x\left(\sqrt{2}-\sqrt{3}\right);\ b=y\left(\sqrt{2}-\sqrt{3}\right)$ ، د) $a=-x\left(\sqrt{3}-2\right);\ b=-y\left(\sqrt{3}-2\right)$

5-الترتيب والمقارنة في مجموعة الأعداد الحقيقية

تمريـن عـــدد 05: قارن بين a و b في كل حالة من الحالات التالية: أ) $b=2\sqrt{5}\ ;\ a=3\sqrt{2}$ ،

ب) $b=-\frac{-8\sqrt{2}}{3}\ ;\ a=-\frac{5\sqrt{3}}{2}$ ، ج) $b=5\sqrt{7}+\sqrt{11};\ a=7\sqrt{5}+\sqrt{11}$ ، د) $b=-13\sqrt{11}+2\pi\ ;\ a=2\pi-11\sqrt{13}$

تمريـن عـــدد 06: نعتبر العددين $a=5+\sqrt{45}-\sqrt{245}$ و $b=\left|1-\sqrt{7}\right|-\left|4\sqrt{7}-2\right|+4$

أ) بين أن $a=5-4\sqrt{5}$ و $b=5-3\sqrt{7}$ ، ب) قارن بين $-3\sqrt{7}$ و $-4\sqrt{5}$ ثم قارن a و b ثم استنتج مقارنة لـ $\frac{1}{a}$ و $\frac{1}{b}$

تمريـن عـــدد 07: نعتبر العددين $x=3+\sqrt{162}-10\sqrt{2}$ و $y=\left(1+\sqrt{3}\right)\left(2-\sqrt{3}\right)$

أ) بين أن: $x=3-\sqrt{2}$ و $y=\sqrt{3}$ ، ب) ما هي علامة العدد x؟ علل جوابك ، ج) بين أن $x^2-y^2=2\left(4-3\sqrt{2}\right)$

د) قارن بين العددين 4 و $3\sqrt{2}$ ، هـ) استنتج مقارنة للعددين x و y.

تمريـن عـــدد 08: نعتبر العددين الحقيقيين بحيث $0<x<1$ و $-1<y<0$

أ) ما هي علامة كل من العددين $x-1$ و $y+1$

ب) قارن بين العددين $\left(\sqrt{5}-1\right)\left(x-1\right)$ و $\left(\sqrt{5}-2\right)\left(x-1\right)$ ثم بين العددين $-\frac{\pi}{3}\left(y+1\right)$ و $-\frac{\pi}{2}\left(y+1\right)$

ج) قارن بين العددين $x\left(y+1\right)$ و $x\left(x-1\right)$

د) رتب تصاعديا الأعداد: $x^4\ ;\ x^3\ ;\ x^2\ ;\ x$

هـ) استنتج ترتيبا تصاعديا للأعداد $\frac{1}{x}\ ;\ \frac{1}{x^2}\ ;\ \frac{1}{x^3}\ ;\ \frac{1}{x^4}$ ثم ترتيبا تصاعديا للأعداد $\frac{-y}{x}\ ;\ \frac{-y}{x^2}\ ;\ \frac{-y}{x^3}\ ;\ \frac{-y}{x^4}$

تمريـن عـــدد 09:

أ) رتب تصاعديا الأعداد: $3\sqrt{5}\ ;\ 2\sqrt{7}\ ;\ 5\sqrt{3}$

ب) رتب تصاعديا: $\sqrt{2}-3\sqrt{5}$ ؛ $\sqrt{2}-2\sqrt{7}$ ، $\sqrt{2}-5\sqrt{3}$ ، $\sqrt{2}$

ج) استنتج ترتيبا تصاعديا للأعداد: $\frac{1}{\sqrt{2}-3\sqrt{5}}\ ;\ \frac{1}{\sqrt{2}-2\sqrt{7}}\ ;\ \frac{1}{\sqrt{2}-5\sqrt{3}}\ ;\ \frac{1}{\sqrt{2}}$

تمريـن عـــدد 10: a و b عددان حقيقيان. أ) انشر $\left(a-b\right)^2$ ، ب) بين أن $a^2+b^2\geq 2ab$

ج) استنتج أن $a^2+2\geq 2\sqrt{2}a$ و $a^2+3\geq 2\sqrt{3}a$ د) بين أن: $\left(a^2+3\right)\sqrt{2}+\left(a^2+2\right)\sqrt{3}\geq 4\sqrt{6}a$

تمريـن عـــدد 11:

a و b عددان حقيقيان بحيث $0<a<1$ و $b>1$

أ) بين أن $\frac{a}{1+b}<\frac{b}{1+a}$ ، ب) انشر $\left(a-b\right)^2$ ثم قارن بين العددين $\frac{a+b}{4}$ و $\frac{ab}{a+b}$

تمريـن عـــدد 12: a ، b و c ثلاثة أعداد حقيقية.

أ) انشر ثم اختصر $\left(a-b\right)^2+\left(a-c\right)^2+\left(b-c\right)^2$ ، ب) ما هي علامة $\left(a-b\right)^2+\left(a-c\right)^2+\left(b-c\right)^2$

ج) بين أن $a^2+b^2+c^2\geq ab+ac+bc$ ، د) استنتج أن $\sqrt{6}+\sqrt{10}+\sqrt{15}\leq 10$

تمريـن عـــدد 13: x و y عددان حقيقيان بحيث $0<x<\sqrt{2}$ و $0<y<\sqrt{3}$

أ) بين أن $\sqrt{\frac{1}{2}x^2+1}<\sqrt{2}$ ، ب) بين أن $\frac{3}{\sqrt{6-y^2}}<\sqrt{3}$

5-الترتيب والمقارنة في مجموعة الأعداد الحقيقية

تمرين عــــدد 14: x و y عددان حقيقيان موجبان قطعا.

أ) انشر $\left(\sqrt{x}-\sqrt{y}\right)^2$ ، ب) بين أن $\frac{x+y}{2} \geq \sqrt{xy}$ ، ج) بين أن $\sqrt{x+y}\left(\frac{1}{\sqrt{x}}+\frac{1}{\sqrt{y}}\right) \geq 2\sqrt{2}$

تمرين عــــدد 15: a و b عددان موجبان قطعا بحيث $a \leq b \leq 1$

أ) بين أن $ab-1 \leq 0$ ، ب) قارن بين $\frac{1}{a}+a$ و $\frac{1}{b}+b$

ج) استنتج مقارنة للعددين: $x = 0.999998+\frac{1}{0.999998}$ و $y = 0.999999+\frac{1}{0.999999}$

تمرين عــــدد 16: x و y عددان حقيقيان موجبان قطعا بحيث $x<y$

1) بين أن $\frac{x^2}{y^2}<\frac{x}{y}<\frac{x+y^2}{y+x^2}$

2) ليكن p عددا صحيحا طبيعيا مخالفا لصفر ولواحد.

أ) انشر $(p+1)^2$ و $(p-1)^2$ ، ب) بين أن $\frac{p^2-2p+1}{p^2+2p+1}<\frac{p-1}{p+1}<\frac{p^2+3p}{p^2-p+2}$

تمرين عــــدد 17: a و b عددان حقيقيان حيث $0<a \leq b \leq 2a$

1) بين أن $(a-b)(2a-b) \leq 0$ ، 2) انشر $\left(a\sqrt{2}-b\right)^2$ و $(a-b)(2a-b)$

3) نعتبر العبارة $A=\frac{2a^2+b^2}{3ab}$ بين أن $\frac{2\sqrt{2}}{3} \leq A \leq 1$

تمرين عــــدد 18: n عدد صحيح طبيعي مخالف للصفر

1) رتب تصاعديا الأعداد: $\frac{1}{n}$ ، $\frac{1}{n+1}$ ، $\frac{1}{n+2}$ و $\frac{1}{n+3}$

2) بين أن $\frac{4}{n+3}<\frac{1}{n}+\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\frac{1}{n+3}<\frac{4}{n}$

3) استنتج أن: $0.03<\frac{1}{100}+\frac{1}{101}+\frac{1}{102}+\frac{1}{103}<0.04$

تمرين عــــدد 19: a عدد صحيح طبيعي مخالف للصفر ولواحد.

أ) بين $\frac{1}{a-1}-\frac{1}{a}=\frac{1}{a(a-1)}$ ، ب) بين أن $\frac{1}{a^2}<\frac{1}{a(a-1)}$ ، ج) استنتج أن $\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{4^4}+......+\frac{1}{100^2}<\frac{99}{100}$

تمرين عــــدد 20: n عدد صحيح طبيعي.

أ) قارن بين العددين $\frac{n+1}{n+2}$ و $\frac{n}{n+1}$

ب) قارن بين العددين $A=\frac{1}{2}\times\frac{3}{4}\times\frac{5}{6}\times\frac{7}{8}\times....\times\frac{19}{20}\times\frac{21}{22}\times\frac{23}{24}$ و $B=\frac{2}{3}\times\frac{4}{5}\times\frac{6}{7}\times\frac{8}{9}\times....\times\frac{20}{21}\times\frac{22}{23}\times\frac{24}{25}$

ج) احسب $A\times B$ ، د) بين أن $B<2A$ ، هـ) استنتج أن $\frac{\sqrt{2}}{10}<A<\frac{1}{5}<B<1$.

تمرين عـ01ـدد:

أ) $a=\frac{6}{7}=\frac{36}{42}$ و $b=\frac{5}{6}=\frac{35}{42}$ لذا $a>b$ ، ب) $a=-\frac{9}{11}=-\frac{81}{99}$ و $b=-\frac{7}{9}=-\frac{77}{99}$ لذا $-\frac{77}{99}>-\frac{81}{99}$ $a<b$

ج) $a=-1.7$ و $b=-\sqrt{3}$ ، لدينا $\sqrt{3}>1.7$ يعني $-\sqrt{3}<-1.7$ لذا $b<a$

د) $a=\pi-\frac{6}{5}$ و $b=\pi-\frac{8}{7}$ ، $a-b=\left(\pi-\frac{6}{5}\right)-\left(\pi-\frac{8}{7}\right)=\pi-\frac{6}{5}-\pi+\frac{8}{7}=-\frac{6}{5}+\frac{8}{7}=-\frac{42}{35}+\frac{40}{35}=-\frac{2}{34}<0$ وبالتالي
$a<b$

هـ) $a=\sqrt{7}-5\sqrt{2}$ و $b=\sqrt{7}-3\sqrt{2}$ ، لدينا $5\sqrt{2}>3\sqrt{2}$ يعني $-5\sqrt{2}<-3\sqrt{2}$ يعني $\sqrt{7}-5\sqrt{2}<\sqrt{7}-3\sqrt{2}$ لذا
$a<b$

و) $a=\frac{-3\sqrt{2}}{5}$ و $b=\frac{-2\sqrt{2}}{3}$ ، $a-b=\left(\frac{-3\sqrt{2}}{5}\right)-\left(\frac{-2\sqrt{2}}{3}\right)=-\frac{3\sqrt{2}}{5}+\frac{2\sqrt{2}}{3}=-\frac{9\sqrt{2}}{15}+\frac{10\sqrt{2}}{15}=\frac{\sqrt{2}}{15}>0$ يعني
$a>b$

ي) $a=\frac{-\sqrt{13}-1}{5}$ و $b=\frac{\sqrt{5}-1}{2}$ ، $\frac{-\sqrt{13}-1}{5}<0$ و $\frac{\sqrt{5}-1}{2}>0$ يعني $a<b$

تمرين عـ02ـدد:

1) $a+\sqrt{2}\le b+\sqrt{2}$ ☒ ، 2) $-\frac{1}{a}\ge-\frac{1}{b}$ ☒ ، 3) $ac+\sqrt{5}\ge bc+\sqrt{5}$ ☒ ، 4) $a^2\ge 3$ ☒

تمرين عـ03ـدد:

أ) $x-y=\left(a-\sqrt{3}\right)-\left(b-\sqrt{2}\right)=a-\sqrt{3}-b+\sqrt{2}=(a-b)+\left(\sqrt{2}-\sqrt{3}\right)\le 0$ إذن $x\le y$

ب) $x-y=(-a-\pi)-(-b-2\pi)=-a-\pi+b+2\pi=(b-a)+\pi\ge 0$ إذن $x\ge y$

ج)
$$x-y=\left(2a-3\sqrt{2}\right)-2\left(b-\sqrt{2}\right)=\left(2a-3\sqrt{2}\right)-\left(2b-2\sqrt{2}\right)=2a-3\sqrt{2}-2b+2\sqrt{2}=2a-2b+2\sqrt{2}-3\sqrt{2}=2(a-b)-\sqrt{2}\le 0$$
إذن $x\le y$

تمرين عـ04ـدد:

أ) $x\le y$ و $\frac{\sqrt{5}}{3}>0$ لذا $x\frac{\sqrt{5}}{3}\le y\frac{\sqrt{5}}{3}$ ، ب) $x\le y$ و $-\frac{\pi}{3}<0$ لذا $-\frac{\pi}{3}x\ge-\frac{\pi}{3}y$

ج) $x\le y$ و $\sqrt{2}-\sqrt{3}<0$ لذا $x\left(\sqrt{2}-\sqrt{3}\right)\ge y\left(\sqrt{2}-\sqrt{3}\right)$ ، د) $x\le y$ و $\sqrt{3}-2<0$ يعني $-x\ge -y$
و $-x\left(\sqrt{3}-2\right)\le -y\left(\sqrt{3}-2\right)$

تمرين عـ05ـدد:

أ) $a=3\sqrt{2}$ و $b=2\sqrt{5}$ ، $a^2=\left(3\sqrt{2}\right)^2=18$ ، $b^2=\left(2\sqrt{5}\right)^2=20$ لدينا $a^2<b^2$ و a و b عددان موجبان إذن $a<b$

ب) $a=-\frac{5\sqrt{3}}{2}$ و $b=-\frac{8\sqrt{2}}{3}$ ، $a^2=\left(-\frac{5\sqrt{3}}{2}\right)^2=\frac{75}{4}$ ، $b^2=\left(-\frac{8\sqrt{2}}{3}\right)^2=\frac{128}{9}$ لدينا $a^2>b^2$ و a و b عددان سالبان
إذن $a<b$

ج) $a=7\sqrt{5}+\sqrt{11}$ و $b=5\sqrt{7}+\sqrt{11}$ ، نقارن بين العددين $7\sqrt{5}$ و $5\sqrt{7}$ ، $\left(7\sqrt{5}\right)^2=245$ و $\left(5\sqrt{7}\right)^2=175$

لدينا $(7\sqrt{5})^2 > (5\sqrt{7})^2$ و $7\sqrt{5}$ و $5\sqrt{7}$ عددان موجبان إذن $7\sqrt{5} > 5\sqrt{7}$ وبالتالي $7\sqrt{5}+\sqrt{11} > 5\sqrt{7}+\sqrt{11}$

د) $a = 2\pi - 11\sqrt{13}$ و $b = -13\sqrt{11} + 2\pi$ ، نقارن بين العددين $-11\sqrt{13}$ و $-13\sqrt{11}$ ، $(-11\sqrt{13})^2 = 121\times13 = 1573$ و $(-13\sqrt{11})^2 = 1859$ ، لدينا $(-11\sqrt{13})^2 < (-13\sqrt{11})^2$ و $-11\sqrt{13}$ و $-13\sqrt{11}$ عددان سالبان إذن $-11\sqrt{13} > -13\sqrt{11}$

وبالتالي $-11\sqrt{13} + 2\pi > -13\sqrt{11} + 2\pi$

تمرين عـ06ـدد:

أ) $a = 5+\sqrt{45}-\sqrt{245} = 5+\sqrt{9}\times\sqrt{5}-\sqrt{49}\times\sqrt{5} = 5+3\sqrt{5}-7\sqrt{5} = 5-4\sqrt{5}$

$b = |1-\sqrt{7}| - |4\sqrt{7}-2| + 4 = (\sqrt{7}-1)-(4\sqrt{7}-2)+4 = \sqrt{7}-1-4\sqrt{7}+2+4 = (-1+2+4)+(\sqrt{7}-4\sqrt{7})$
$= 5-3\sqrt{7}$

ب) $a = 5-4\sqrt{5}$ و $b = 5-3\sqrt{7}$ ، نقارن $-4\sqrt{5}$ و $-3\sqrt{7}$ ، $(-4\sqrt{5})^2 = 16\times5 = 80$ و $(3\sqrt{7})^2 = 9\times7 = 63$. لدينا $(-4\sqrt{5})^2 > (-3\sqrt{7})^2$ و $(-4\sqrt{5})$ و $(-3\sqrt{7})$ عددان سالبان إذن $-4\sqrt{5} < -3\sqrt{7}$ وبالتالي $5-3\sqrt{7} > 5-4\sqrt{5}$

وبما أن $ab > 0$ فإن $\frac{1}{a} < \frac{1}{b}$.

تمرين عـ07ـدد:

أ) $x = 3+\sqrt{162}-10\sqrt{2} = 3+\sqrt{81}\times\sqrt{2}-10\sqrt{2} = 3+9\sqrt{2}-10\sqrt{2} = 3-\sqrt{2}$

$y = (1+\sqrt{3})(2-\sqrt{3})+1 = 2-\sqrt{3}+2\sqrt{3}-\sqrt{3}\times\sqrt{3}+1 = 2-\sqrt{3}+2\sqrt{3}-3+1 = (2-3+1)+(-\sqrt{3}+2\sqrt{3}) = \sqrt{3}$

ب) لدينا $\sqrt{2} < 3$ لذا $3-\sqrt{2} > 0$

ج) $x^2-y^2 = (3-\sqrt{2})^2-(\sqrt{3})^2 = (3-\sqrt{2})(3-\sqrt{2})-3 = 3\times3-3\sqrt{2}-3\sqrt{2}+\sqrt{2}\times\sqrt{2}-3 = 9-6\sqrt{2}+2-3 = (9+2-3)-6\sqrt{2} = 8-6\sqrt{2} = 2(4-3\sqrt{2})$

د) $4^2 = 16$ و $(3\sqrt{2})^2 = 9\times2 = 18$ يعني $4^2 < (3\sqrt{2})^2$ وبما أن $4 > 0$ و $3\sqrt{2} > 0$ فإن $4 < 3\sqrt{2}$

إذن $x^2-y^2 = 2(4-3\sqrt{2}) < 0$ وبالتالي $x^2 < y^2$ ونعلم أن $x > 0$ و $y > 0$ إذن $x < y$

تمرين عـ08ـدد:

أ) **لدينا** $x < 1$ **و** $-1 < y$ لذا $x-1 < 1-1$ و $-1+1 < y+1$ وبالتالي $x-1 < 0$ و $y+1 > 0$.

ب) لدينا $\sqrt{5} < 2$ ، $\sqrt{5}-1 > \sqrt{5}-2$ و $x-1 < 0$ لذا $(\sqrt{5}-1)(x-1) < (\sqrt{5}-2)(x-1)$ ولدينا أيضا $-\frac{\pi}{2} < -\frac{\pi}{3}$ و $y+1 > 0$

لذا $-\frac{\pi}{2}(y+1) < -\frac{\pi}{3}(y+1)$

ج) لدينا $y+1 > 0$ و $x-1 < 0$ لذا $y+1 > x-1$ ونعلم أن $x > 0$ إذن $x(y+1) > x(x-1)$

د) بما أن $0 < x < 1$ فإن $x > x^2 > x^3 > x^4$

هـ) بما أن $x^4 < x^3 < x^2 < x$ فإن $\frac{1}{x^4} > \frac{1}{x^3} > \frac{1}{x^2} > \frac{1}{x}$ وبما أن $y < 0$ فإن $\frac{y}{x^4} < \frac{y}{x^3} < \frac{y}{x^2} < \frac{y}{x}$ وبالتالي

$\frac{-y}{x^4} > \frac{-y}{x^3} > \frac{-y}{x^2} > \frac{-y}{x}$

تمريـن عـ09ـدد:

أ) $\left(3\sqrt{5}\right)^2=9\times5=45$ ، $\left(2\sqrt{7}\right)^2=4\times7=28$ ، $\left(5\sqrt{3}\right)^2=25\times3=75$ إذن $2\sqrt{7}<3\sqrt{5}<5\sqrt{3}$

ب) بما أن $2\sqrt{7}<3\sqrt{5}<5\sqrt{3}$ فإن $-2\sqrt{7}>-3\sqrt{5}>-5\sqrt{3}$ وبالتالي $\sqrt{2}>\sqrt{2}-2\sqrt{7}>\sqrt{2}-3\sqrt{5}>\sqrt{2}-5\sqrt{3}$

ج) بما أن $\sqrt{2}>\sqrt{2}-2\sqrt{7}>\sqrt{2}-3\sqrt{5}>\sqrt{2}-5\sqrt{3}$ فإن $\frac{1}{\sqrt{2}}<\frac{1}{\sqrt{2}-2\sqrt{7}}<\frac{1}{\sqrt{2}-3\sqrt{5}}<\frac{1}{\sqrt{2}-5\sqrt{3}}$

تمريـن عـ10ـدد:

أ) $(a-b)^2=(a-b)(a-b)=a\times a-ab-ba+b\times b=a^2-2ab+b^2$

ب) لدينا $(a-b)^2\geq0$ و $(a-b)^2=a^2-2ab+b^2$ لذا $a^2-2ab+b^2\geq0$ إذن $a^2+b^2\geq2ab$

ج) لدينا $\left(a-\sqrt{2}\right)^2=a^2-2a\sqrt{2}+\sqrt{2}^2=a^2-2a\sqrt{2}+2$ لذا $a^2+2\geq2a\sqrt{2}$ (حسب السؤال ب)

كذلك $\left(a-\sqrt{3}\right)^2=a^2-2a\sqrt{3}+\sqrt{3}^2=a^2-2a\sqrt{3}+3$ لذا $a^2+3\geq2a\sqrt{3}$ (حسب السؤال ب)

د) لدينا $a^2+2\geq2a\sqrt{2}$ يعني $\left(a^2+2\right)\sqrt{3}\geq2a\sqrt{3}\times\sqrt{2}$ يعني $\sqrt{3}\left(a^2+2\right)\geq2a\sqrt{6}$ كذلك لدينا $a^2+3\geq2a\sqrt{3}$

يعني $\left(a^2+3\right)\sqrt{2}\geq2a\sqrt{2}\times\sqrt{3}$ يعني $\sqrt{2}\left(a^2+3\right)\geq2a\sqrt{6}$

إذن $\sqrt{3}\left(a^2+2\right)+\sqrt{2}\left(a^2+3\right)\geq2a\sqrt{6}+2a\sqrt{6}$ يعني $\sqrt{3}\left(a^2+2\right)+\sqrt{2}\left(a^2+3\right)\geq4a\sqrt{6}$.

تمريـن عـ11ـدد:

أ) لدينا $0<a<1$ و $b>1$ يعني $a<b$ لذا $\frac{1}{b+1}>\frac{1}{a+1}$ وبما أن $b>a>0$ فإن $\frac{a}{b+1}>\frac{b}{a+1}$

ب) $(a-b)^2=(a-b)(a-b)=a\times a-ab-ba+b\times b=a^2-2ab+b^2$

$$\frac{ab}{a+b}-\frac{a+b}{4}=\frac{4ab}{4(a+b)}-\frac{(a+b)(a+b)}{4(a+b)}=\frac{4ab-(a+b)(a+b)}{4(a+b)}=\frac{4ab-\left(a^2+2ab+b^2\right)}{4(a+b)}=\frac{4ab-a^2-2ab-b^2}{4(a+b)}$$

$$=\frac{2ab-a^2-b^2}{4(a+b)}=\frac{-\left(a^2-2ab+b^2\right)}{4(a+b)}=\frac{-(a-b)^2}{4(a+b)}$$

بما أن $-(a-b)^2<0$ و $4(a+b)>0$ فإن $\frac{-(a-b)^2}{4(a+b)}<0$ وبالتالي $\frac{ab}{a+b}-\frac{a+b}{4}<0$ إذن $\frac{ab}{a+b}<\frac{a+b}{4}$

تمريـن عـ12ـدد:

أ) $(a-b)^2+(a-c)^2+(b-c)^2=(a-b)(a-b)+(a-c)(a-c)+(b-c)(b-c)$

$=a^2-2ab+b^2+a^2-2ac+c^2+b^2-2bc+c^2=2a^2+2b^2+2c^2-2ab-2ac-2bc=2\left(a^2+b^2+c^2-ab-ac-bc\right)$

ب) لدينا $(a-b)^2\geq0$ ، $(a-c)^2\geq0$ و $(b-c)^2\geq0$ لذا $(a-b)^2+(a-c)^2+(b-c)^2\geq0$

ج) بما أن $(a-b)^2+(a-c)^2+(b-c)^2\geq0$ فإن $2\left(a^2+b^2+c^2-ab-ac-bc\right)\geq0$ يعني

$a^2+b^2+c^2-ab-ac-bc\geq0$ وبالتالي $a^2+b^2+c^2\geq ab+ac+bc$

د) نعتبر $a=\sqrt{2}$ ، $b=\sqrt{3}$ و $c=\sqrt{5}$ لدينا $a^2+b^2+c^2\geq ab+ac+bc$ (حسب السؤال ج) لذا

$\left(\sqrt{2}\right)^2+\left(\sqrt{3}\right)^2+\left(\sqrt{5}\right)^2\geq\sqrt{2}\sqrt{3}+\sqrt{2}\sqrt{5}+\sqrt{3}\sqrt{5}$ يعني $2+3+5\geq\sqrt{6}+\sqrt{10}+\sqrt{15}$ يعني $10\geq\sqrt{6}+\sqrt{10}+\sqrt{15}$

تمريـن عـ13ـدد:

أ) لدينا $0<x<\sqrt{2}$ يعني $x^2<2$ يعني $\frac{x^2}{2}<1$ يعني $\frac{x^2}{2}+1<2$ يعني $\sqrt{\frac{x^2}{2}+1}<\sqrt{2}$

ب) لدينا $0<y<\sqrt{3}$ يعني $y^2<3$ يعني $-y^2>-3$ يعني $6-y^2>3$ يعني $\sqrt{6-y^2}>\sqrt{3}$ يعني $\frac{1}{\sqrt{6-y^2}}<\frac{1}{\sqrt{3}}$

يعني $\frac{3}{\sqrt{6-y^2}}<\frac{3}{\sqrt{3}}$ يعني $\frac{3}{\sqrt{6-y^2}}<\sqrt{3}$ (لأن $\frac{3}{\sqrt{3}}=\frac{3\times\sqrt{3}}{\sqrt{3}\times\sqrt{3}}=\frac{3\sqrt{3}}{3}=\sqrt{3}$)

تمريـن عـ14ـدد:

أ) $\left(\sqrt{x}-\sqrt{y}\right)^2=\left(\sqrt{x}-\sqrt{y}\right)\left(\sqrt{x}-\sqrt{y}\right)=\sqrt{x}\times\sqrt{x}-\sqrt{x}\times\sqrt{y}-\sqrt{y}\times\sqrt{x}+\sqrt{y}\times\sqrt{y}=x+y-2\sqrt{xy}$

ب) لدينا $\left(\sqrt{x}-\sqrt{y}\right)^2\geq 0$ لذا $x+y-2\sqrt{xy}>0$ يعني $x+y\geq 2\sqrt{xy}$ يعني $\frac{x+y}{2}\geq\sqrt{xy}$

ج) لدينا $x+y\geq 2\sqrt{xy}$ يعني $\sqrt{x+y}\geq\sqrt{2\sqrt{xy}}$ يعني $\sqrt{x+y}\geq\sqrt{2}\sqrt{\sqrt{xy}}$ كذلك لدينا $\frac{1}{\sqrt{x}}+\frac{1}{\sqrt{y}}\geq 2\sqrt{\frac{1}{\sqrt{x}}\frac{1}{\sqrt{y}}}$

يعني $\frac{1}{\sqrt{x}}+\frac{1}{\sqrt{y}}\geq 2\frac{1}{\sqrt{\sqrt{xy}}}$ لذا $\sqrt{x+y}\left(\frac{1}{\sqrt{x}}+\frac{1}{\sqrt{y}}\right)\geq\sqrt{2}\sqrt{\sqrt{xy}}\times\frac{2}{\sqrt{\sqrt{xy}}}=2\sqrt{2}$

إذن $\sqrt{x+y}\left(\frac{1}{\sqrt{x}}+\frac{1}{\sqrt{y}}\right)\geq 2\sqrt{2}$

تمريـن عـ15ـدد:

أ) لدينا $a\leq 1$ ، $b\leq 1$ حيث a و b عددان موجبان لذا $ab\leq 1$ يعني $ab-1\leq 0$

ب) $\left(\frac{1}{a}+a\right)-\left(\frac{1}{b}+b\right)=\frac{1}{a}+a-\frac{1}{b}-b=\frac{1}{a}-\frac{1}{b}+a-b=\frac{b}{ab}-\frac{a}{ab}+a-b=\frac{b-a}{ab}+a-b=\frac{b-a}{ab}-(b-a)=(b-a)\left(\frac{1}{ab}-1\right)$

$=(b-a)\left(\frac{1-ab}{ab}\right)=\frac{1}{ab}\times(a-b)\times(ab-1)$

a و b عددان موجبان و $a\leq b$ يعني $ab\geq 0$ و $a-b\leq 0$ وبما أن $ab-1\leq 0$ (حسب السؤال أ) فإن

$\frac{1}{ab}(a-b)(ab-1)\geq 0$ إذن $\left(\frac{1}{a}+a\right)-\left(\frac{1}{b}+b\right)\geq 0$ وبالتالي $\frac{1}{a}+a\geq\frac{1}{b}+b$.

ج) نعتبر $a=0.999998$ و $b=0.999999$ ، حسب السؤال ب) لدينا:

$$x=0.999998+\frac{1}{0.999998}>y=0.999999+\frac{1}{0.999999}$$

تمريـن عـ16ـدد:

1) $\frac{x^2}{y^2}-\frac{x}{y}=\frac{x^2}{y^2}-\frac{xy}{y^2}=\frac{x^2-xy}{y^2}=\frac{x(x-y)}{y^2}<0$ (لأن $x-y<0$ ، $x>0$ و $y^2>0$) يعني $\frac{x(x-y)}{y^2}<0$ لذا

$\frac{x^2}{y^2}-\frac{x}{y}<0$ يعني $\frac{x^2}{y^2}<\frac{x}{y}$ $\qquad$ $\frac{x}{y}-\frac{x+y^2}{y+x^2}=\frac{x\left(y+x^2\right)-y\left(x+y^2\right)}{y\left(y+x^2\right)}=\frac{xy+x^3-yx-y^3}{y\left(y+x^2\right)}=\frac{x^3-y^3}{y\left(y+x^2\right)}<0$ (لأن

x و y عددان موجبان قطعا و $x<y$ يعني $x^3<y^3$ و $y+x^2>0$) يعني $\frac{x^3-y^3}{y(y+x^2)}<0$ لذا $\frac{x}{y}-\frac{x+y^2}{y+x^2}<0$ يعني

$\frac{x}{y}<\frac{x+y^2}{y+x^2}$

بما أن $\frac{x^2}{y^2}<\frac{x}{y}$ و $\frac{x}{y}<\frac{x+y^2}{y+x^2}$ فإن $\frac{x^2}{y^2}<\frac{x}{y}<\frac{x+y^2}{y+x^2}$

2) أ) $(p+1)^2=p^2+2p+1$ ، $(p-1)^2=p^2-2p+1$

ب) لدينا p عدد صحيح طبيعي مخالف لصفر ولواحد لذا $p-1\neq 0$ و $p+1\neq 0$ و $p-1<p+1$. إعتمادا على السؤال (1) نعتبر $x=p-1$ و $y=p+1$ إذن نتحصل على $\frac{(p-1)^2}{(p+1)^2}<\frac{p-1}{p+1}<\frac{(p-1)+(p+1)^2}{(p+1)+(p-1)^2}$ وبما أن

$(p-1)^2=p^2-2p+1$ و $(p+1)^2=p^2+2p+1$ فإن $(p-1)+(p+1)^2=p-1+p^2+2p+1=p^2+3p$

و $(p+1)+(p-1)^2=p+1+p^2-2p+1=p^2-p+2$ وبالتالي $\frac{(p-1)^2}{(p+1)^2}<\frac{p-1}{p+1}<\frac{p^2+3p}{p^2-p+2}$

تمرين عـ17ـدد:

1) لدينا $a\leq b$ يعني $a-b\leq 0$ و $b\leq 2a$ يعني $2a-b\geq 0$ لذا $(a-b)(2a-b)\leq 0$

2) $(a\sqrt{2}-b)^2=(a\sqrt{2}-b)(a\sqrt{2}+b)=a\sqrt{2}\times a\sqrt{2}-ba\sqrt{2}-ba\sqrt{2}+b^2=2a^2-2ab\sqrt{2}+b^2$

$(a-b)(2a-b)=a\times 2a-a\times b-b\times 2a+b^2=2a^2-3ab+b^2$

3) $A=\frac{2a^2+b^2}{3ab}$ ، $A-1=\frac{2a^2+b^2}{3ab}-1=\frac{2a^2+b^2-3ab}{3ab}=\frac{2a^2-3ab+b^2}{3ab}=\frac{(a-b)(2a-b)}{3ab}$

لدينا $(a-b)(2a-b)\leq 0$ (حسب السؤال (1)) و $ab>0$ (لأن $b\geq a>0$) لذا $\frac{(a-b)(2a-b)}{3ab}\leq 0$ إذن $A-1\leq 0$

وبالتالي $A\leq 1$

$$A-\frac{2\sqrt{2}}{3}=\frac{2a^2+b^2}{3ab}-\frac{2\sqrt{2}}{3}=\frac{2a^2+b^2}{3ab}-\frac{2ab\sqrt{2}}{3ab}=\frac{2a^2+b^2-2ab\sqrt{2}}{3ab}=\frac{2a^2-2ab\sqrt{2}+b^2}{3ab}=\frac{(a\sqrt{2}-b)^2}{3ab}$$

لدينا $(a\sqrt{2}-b)^2\geq 0$ و $3ab>0$ لذا $\frac{(a\sqrt{2}-b)^2}{3ab}\geq 0$ إذن $A-\frac{2\sqrt{2}}{3}\geq 0$ وبالتالي $A\geq\frac{2\sqrt{2}}{3}$

بما أن $A\leq 1$ و $A\geq\frac{2\sqrt{2}}{3}$ فإن $\frac{2\sqrt{2}}{3}\leq A\leq 1$

تمرين عـ18ـدد:

1) لدينا $n<n+1<n+2<n+3$ لذا $\frac{1}{n}>\frac{1}{n+1}>\frac{1}{n+2}>\frac{1}{n+3}$

2) حسب السؤال (1) لدينا: $\frac{1}{n+3}<\frac{1}{n}$ و $\frac{1}{n+3}<\frac{1}{n+1}$ و $\frac{1}{n+3}<\frac{1}{n+2}$ لذا

$\frac{1}{n+3}+\frac{1}{n+3}+\frac{1}{n+3}<\frac{1}{n}+\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}$

يعني $\frac{3}{n+3}<\frac{1}{n}+\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}$ يعني $\frac{3}{n+3}+\frac{1}{n+3}<\frac{1}{n}+\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\frac{1}{n+3}$ يعني

$\frac{4}{n+3}<\frac{1}{n}+\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\frac{1}{n+3}$

ولدينا كذلك $\frac{1}{n}>\frac{1}{n+1}$; $\frac{1}{n}>\frac{1}{n+2}$ و $\frac{1}{n}>\frac{1}{n+3}$ يعني $\frac{1}{n}+\frac{1}{n}+\frac{1}{n}>\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\frac{1}{n+3}$ يعني

يعني $\frac{3}{n}>\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\frac{1}{n+3}$ يعني $\frac{3}{n}+\frac{1}{n}>\frac{1}{n}+\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\frac{1}{n+3}$ يعني $\frac{4}{n}>\frac{1}{n}+\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\frac{1}{n+3}$. بما أن

$\frac{1}{n}+\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\frac{1}{n+3}<\frac{4}{n}$ و $\frac{4}{n+3}<\frac{1}{n}+\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\frac{1}{n+3}$ فإن $\frac{4}{n+3}<\frac{1}{n}+\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\frac{1}{n+3}<\frac{4}{n}$.

3) اعتمادا على السؤال (2) نعتبر $n=100$ فنتحصل على $\frac{4}{103}<\frac{1}{100}+\frac{1}{101}+\frac{1}{102}+\frac{1}{103}<\frac{4}{100}=0.04$ وبما أن

$\frac{3}{100}<\frac{4}{103}$

فإن $0.03<\frac{1}{100}+\frac{1}{101}+\frac{1}{102}+\frac{1}{103}<\frac{4}{100}=0.04$

تمريـن عـ19ـدد:

أ) $\frac{1}{a-1}-\frac{1}{a}=\frac{a-(a-1)}{a(a-1)}=\frac{a-a+1}{a(a-1)}=\frac{1}{a(a-1)}$

ب) لدينا $a-1<a$ لذا $\frac{1}{a-1}>\frac{1}{a}$ يعني $\frac{1}{a}\times\frac{1}{a-1}>\frac{1}{a}\times\frac{1}{a}$ يعني $\frac{1}{a^2}<\frac{1}{a(a-1)}$

ج) اعتمادا على السؤال (ب): لدينا $\frac{1}{a^2}<\frac{1}{a(a-1)}=\frac{1}{a-1}-\frac{1}{a}$ لذا

$\frac{1}{2^2}<\frac{1}{2-1}-\frac{1}{2}=1-\frac{1}{2}$ ، $\frac{1}{3^2}<\frac{1}{3-1}-\frac{1}{3}=\frac{1}{2}-\frac{1}{3}$ ، $\frac{1}{4^2}<\frac{1}{4-1}-\frac{1}{4}=\frac{1}{3}-\frac{1}{4}$

$\frac{1}{5^2}<\frac{1}{5-1}-\frac{1}{5}=\frac{1}{4}-\frac{1}{5}$ ، $\frac{1}{99^2}<\frac{1}{99-1}-\frac{1}{99}=\frac{1}{98}-\frac{1}{99}$ ، $\frac{1}{100^2}<\frac{1}{100-1}-\frac{1}{100}=\frac{1}{99}-\frac{1}{100}$

يعني $\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{4^2}+.....+\frac{1}{99^2}+\frac{1}{100^2}<\left(1-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right)+......+\left(\frac{1}{98}-\frac{1}{99}\right)+\left(\frac{1}{99}-\frac{1}{100}\right)$ يعني

$\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{4^2}+.....+\frac{1}{99^2}+\frac{1}{100^2}<1+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{4}\right)+......+\left(\frac{1}{98}-\frac{1}{98}\right)+\left(\frac{1}{99}-\frac{1}{99}\right)-\frac{1}{100}$ يعني

$\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{4^2}+.....+\frac{1}{99^2}+\frac{1}{100^2}<1-\frac{1}{100}=\frac{99}{100}$

تمريـن عـ20ـدد:

أ) $\frac{n}{n+1}-\frac{n+1}{n+2}=\frac{n(n+2)}{(n+1)(n+2)}-\frac{(n+1)(n+1)}{(n+1)(n+2)}=\frac{n(n+2)-(n+1)(n+1)}{(n+1)(n+2)}=\frac{n^2+2n-n^2-2n-1}{(n+1)(n+2)}=\frac{-1}{(n+1)(n+2)}<0$

إذن $\frac{n}{n+1}<\frac{n+1}{n+2}$

ب) اعتمادا على السؤال (أ) لدينا:

$\frac{1}{2}<\frac{2}{3}$; $\frac{3}{4}<\frac{4}{5}$; $\frac{5}{6}<\frac{6}{7}$; $\frac{7}{8}<\frac{8}{9}$; .... ; $\frac{19}{20}<\frac{20}{21}$; $\frac{21}{22}<\frac{22}{23}$; $\frac{23}{24}<\frac{24}{25}$

يعني $\frac{1}{2}\times\frac{3}{4}\times\frac{5}{7}\times\frac{7}{8}\times.....\times\frac{19}{20}\times\frac{21}{22}\times\frac{23}{24}<\frac{2}{3}\times\frac{4}{5}\times\frac{6}{7}\times\frac{8}{3}\times.....\times\frac{20}{21}\times\frac{22}{23}\times\frac{24}{25}$ يعني $A<B$

ج) $A\times B=\frac{1}{2}\times\frac{2}{3}\times\frac{3}{4}\times\frac{4}{5}\times\frac{2}{6}\times.......\times\frac{20}{21}\times\frac{21}{22}\times\frac{22}{23}\times\frac{23}{24}\times\frac{24}{25}=\frac{1}{25}$

د) $2A=\frac{3}{4}\times\frac{5}{6}\times\frac{7}{8}\times....\times\frac{19}{20}\times\frac{21}{22}\times\frac{23}{24}$ ، $B=\frac{2}{3}\times\frac{4}{5}\times\frac{6}{7}\times\frac{8}{9}\times.......\times\frac{20}{21}\times\frac{22}{23}\times\frac{24}{25}$

لدينا $\frac{2}{3}<\frac{3}{4}$ ، $\frac{4}{5}<\frac{5}{6}$ ، $\frac{6}{7}<\frac{7}{8}$ ، .... ، $\frac{20}{21}<\frac{21}{22}$ ، $\frac{22}{23}<\frac{23}{24}$

لذا $\frac{2}{3}\times\frac{4}{5}\times\frac{6}{7}\times.......\times\frac{20}{21}\times\frac{22}{23}<\frac{3}{4}\times\frac{5}{6}\times\frac{7}{8}\times.......\times\frac{21}{22}\times\frac{23}{24}$ ونعلم أن $\frac{24}{25}<1$

إذن $\frac{2}{3}\times\frac{4}{5}\times\frac{6}{7}\times........\times\frac{20}{21}\times\frac{22}{23}\times\frac{24}{25}<\frac{3}{4}\times\frac{5}{6}\times\frac{7}{8}\times.......\times\frac{21}{22}\times\frac{23}{24}$ وبالتالي $B<2A$

هـ) لدينا $B<2A$ يعني $B\times A<2\times A\times A$ يعني $AB<2A^2$ يعني $A^2>\frac{AB}{2}$ يعني $\sqrt{A^2}>\sqrt{\frac{AB}{2}}$ يعني $A>\frac{\sqrt{AB}}{\sqrt{2}}$

يعني $A>\frac{\sqrt{\frac{1}{25}}}{\sqrt{2}}$ يعني $A>\frac{\frac{1}{5}}{\sqrt{2}}$ يعني $A>\frac{1}{5\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{10}$ إذن $A>\frac{\sqrt{2}}{10}$ (1). لدينا كذلك $A<B$ يعني $A^2<AB$

يعني $\sqrt{A^2}<\sqrt{AB}$ يعني $A<\sqrt{\frac{1}{25}}$ يعني $A<\frac{1}{5}$ (2). لدينا كذلك $B>A$ يعني $B^2>AB$ يعني $\sqrt{B^2}>\sqrt{AB}$ يعني

$B>\sqrt{\frac{1}{25}}$

يعني $B>\frac{1}{5}$ (3) ونعلم أن $B<1$ (4).

إذن حسب: (1) + (2) + (3) + (4) نتحصل على $\frac{\sqrt{2}}{10}<A<\frac{1}{5}<B<1$