مراجعة عـــامة

إذا كان a و b عددين حقيقيين فإن: $(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$ ، $(a-b)^2=a^2-2ab+b^2$ ، $(a+b)(a-b)=a^2-b^2$

التمـــارين

تمرين عـــدد 01:

احسب: $\left(\sqrt{2}+1\right)^2$ ، $\left(1-\sqrt{3}\right)^2$ ، $\left(\sqrt{3}+\sqrt{2}\right)\left(\sqrt{3}-\sqrt{2}\right)$ ، $\left(3\sqrt{2}-1\right)\left(3\sqrt{2}+1\right)$ ، $\left(3+2\sqrt{2}\right)^2$ ، $\left(2\sqrt{3}-3\right)^2$

$\left[1-\left(\sqrt{2}+\sqrt{3}\right)\right]\left[1+\left(\sqrt{2}+\sqrt{3}\right)\right]$ ، $\left[\sqrt{2}-\left(\sqrt{3}-\sqrt{5}\right)\right]\left[\sqrt{2}+\left(\sqrt{3}-\sqrt{5}\right)\right]$ ، $\left[2-\sqrt{2}+\sqrt{3}\right]\left[2+\sqrt{2}-\sqrt{3}\right]$

تمرين عـــدد 02: ضع العلامة ☒ أمام المقترح السليم:

1) إذا كان x و y عددين حقيقيين فإن: $(x+y)(x-y)=x^2+y^2$ ❑ ، $(x+y)(x-y)=x^2-y^2$ ❑ ، $(x-y)^2=x^2+y^2$ ❑

2) إذا كان $a=99\times101$ و $b=100$ فإن: $a=b^2+1$ ❑ ، $a=b^2-1$ ❑ ، $a=b-1$ ❑

3) إذا كان $C=\frac{2}{3}-(a+7)-\left(\frac{5}{3}-b\right)$ و $a-b=-8$ فإن: $C=-16$ ❑ ، $C=0$ ❑ ، $C=16$ ❑

تمرين عـــدد 03:

1) انشر العبارات التالية حيث $x\in IR$: $(x+1)^2$; $(x-1)^2$; $(x+1)(x-1)$

2) احسب إذن: 101^2 ; 99^2 ; 101×99

تمرين عـــدد 04:

انشر ثم اختصر كل من العبارات التالية: $\left(2x-\sqrt{2}\right)\left(2x+\sqrt{2}\right)$ ، $\left(x+\sqrt{5}\right)^2$ ، $\left(\sqrt{7}-x\right)^2$ ، $\left(\frac{1}{2}x-1\right)^2$ ،

$\left(x^2+2\right)^2$ ، $\left(x^3-1\right)\left(x^3+1\right)$ ، $\left(x-\sqrt{2}+\sqrt{3}\right)\left(x+\sqrt{2}-\sqrt{3}\right)$ ، $\left(\sqrt{3}-\sqrt{2}\right)\left(2x-\sqrt{5}\right)\left(\sqrt{3}+\sqrt{2}\right)\left(2x+\sqrt{5}\right)$

تمرين عـــدد 05:

فكك إلى جذاء عوامل: x^2-1 ; x^2-9 ; x^2+6x+9 ; x^2-4x+4

; x^2+2x+1 ; $4x^4-25$ ، $4x^2+12x+9$; $9x^2-12x+4$; $x^2-2\sqrt{3}x+3$; $\frac{1}{4}x^2-x+1$

; x^4+2x^2+1 ; $5x^2-3$; $(x+1)^2+2(x+1)+1$

تمرين عـــدد 06:

أوجد كتابة للأعداد التالية مقامها عددا صحيحا: $\frac{5}{\sqrt{3}}$; $\frac{1}{\sqrt{2}+1}$; $\frac{3}{\sqrt{3}-1}$; $\frac{1}{2-\sqrt{5}}$; $\frac{\sqrt{2}}{2\sqrt{5}+\sqrt{3}}$; $\frac{\sqrt{2}+\sqrt{3}}{\sqrt{2}-\sqrt{3}}$

تمرين عـــدد 07: فكك إلى جذاء عوامل كل من العبارات التالية:

$A=x^2-4x+1+(3x+1)(2x-1)$ ، $B=x^2-\frac{1}{4}+\left(x+\frac{1}{3}\right)\left(x-\frac{1}{2}\right)$

$C=(2x+3)(4x-1)+4x^2+12x+9$ و $F=(x+1)^2-2y(x+1)+y^2-x+y-1$

تمرين عـــدد 08: احسب العبارات التالية حيث $a\in IR$ ، $b\in IR$ ، $a+b=\sqrt{3}$ و $a-b=\sqrt{2}$

$A=a^2+2ab+b^2-\sqrt{3}a-\sqrt{3}b$ ، $B=2\left(a^2-b^2\right)-a^2+2ab-b^2$

6-الجذاءات المعتبرة والعبارات الجبرية

$C=\left(a-\sqrt{3}\right)^2-\left(b+\sqrt{2}\right)^2+\sqrt{3}(b-a)$ ، $D=b^2-(a-1)^2-\sqrt{3}+1$

تمرين عدد 09: نعتبر العبارتين التاليتين $A=(x+y)^2-2xy$ و $B=(x-y)^2+2xy$ حيث $x\in IR$ و $y\in IR$.

1) أثبت أن $A=B=x^2+y^2$

2) احسب إذن $\left(\sqrt{3}+\sqrt{2}\right)^2-2\sqrt{6}$ و $\left(\sqrt{3}-\sqrt{5}\right)^2+2\sqrt{15}$

تمرين عدد 10: احسب:

$a=\dfrac{1}{\sqrt{2}+1}+\dfrac{1}{\sqrt{2}-1}$ ، $b=\dfrac{1}{\sqrt{3}-2}-\dfrac{1}{\sqrt{3}+2}$ ، $c=\dfrac{\sqrt{3}+2}{\sqrt{3}-2}-\dfrac{\sqrt{3}-2}{2+\sqrt{3}}$ ، $d=\dfrac{\dfrac{1-\sqrt{2}}{\sqrt{3}+2}}{\dfrac{\sqrt{3}-2}{1+\sqrt{2}}}$ ، $e=\dfrac{\dfrac{\sqrt{2}}{2}\left(\dfrac{\sqrt{5}-2\sqrt{7}}{2-3\sqrt{2}}\right)}{\dfrac{1}{\sqrt{2}}\left(\dfrac{3\sqrt{2}+2}{2\sqrt{7}+\sqrt{5}}\right)}$

تمرين عدد 11:

1) اكتب في صيغة $(a+b)^2$ أو $(a-b)^2$ الأعداد التالية:

$5+2\sqrt{6}$; $5-2\sqrt{6}$; $12+2\sqrt{35}$; $11-6\sqrt{2}$;

$27+10\sqrt{2}$; $27-10\sqrt{2}$; $14+4\sqrt{10}$; $14-4\sqrt{10}$

2) أثبت أن: $\sqrt{27+10\sqrt{2}}+\sqrt{27-10\sqrt{2}}=10$ و $\sqrt{14-4\sqrt{10}}+\sqrt{14+4\sqrt{10}}=2\sqrt{10}$.

تمرين عدد 12: نعتبر العبارة التالية: $E=\left(\dfrac{a+b}{2}\right)^2-\left(\dfrac{a-b}{2}\right)^2$ حيث $a\in IR$ و $b\in IR$.

1) أثبت أن: $E=ab$

2) استنتج أن: $\left(\dfrac{5\sqrt{2}+2\sqrt{5}}{2}\right)^2-\left(\dfrac{5\sqrt{2}-2\sqrt{5}}{2}\right)^2=10\sqrt{10}$ و $\left(\dfrac{3^{-39}+3^{39}}{2}\right)^2-\left(\dfrac{3^{-39}-3^{39}}{2}\right)^2=1$

تمرين عدد 13: نعتبر العددين $x=\sqrt{2\sqrt{5}+\sqrt{19}}$ و $y=\sqrt{2\sqrt{5}-\sqrt{19}}$

1) احسب: xy ; $(x+y)^2$; $(x-y)^2$ 2) اختصر: $\dfrac{x+y}{x-y}$

تمرين عدد 14: نعتبر العبارتين: $A=\sqrt{b}-\sqrt{a}$ و $B=\sqrt{b-a}$ حيث $a\in IR_+$ ، $b\in IR_+$ و $a\leq b$.

1) بين أن: $2\sqrt{a}\left(\sqrt{b}-\sqrt{a}\right)\geq 0$ 2) أثبت أن: $2A\sqrt{a}=2\left(\sqrt{ab}-a\right)$ 3) بين أن: $B^2-A^2=2A\sqrt{2}$

4) قارن A و B ، 5) استنتج مقارنة للعددين $\sqrt{5-\sqrt{3}}$ و $\sqrt{7-2\sqrt{3}}-\sqrt{2-\sqrt{3}}$

تمرين عدد 15: نعتبر العددين $a=\sqrt{3-2\sqrt{2}}$ و $b=\sqrt{3+2\sqrt{2}}$.

1) احسب: a^2 ; b^2 ; $a\times b$ ، 2) بين أن a مقلوب b ، 3) احسب $(a+b)^2$ و $(a-b)^2$

4) استنتج أن $\sqrt{3+2\sqrt{2}}+\sqrt{3-2\sqrt{2}}=2\sqrt{2}$ وأن: $\sqrt{3+2\sqrt{2}}-\sqrt{3-2\sqrt{2}}=2$

تمرين عدد 16: نعتبر العبارتين $x=\sqrt{\dfrac{a+\sqrt{a^2-b}}{2}}$ و $y=\sqrt{\dfrac{a-\sqrt{a^2-b}}{2}}$ حيث $a\in IR_+$ ، $b\in IR_+$ و $a>b$.

1) بين أن $a>\sqrt{a^2-b}$

6-الجذاءات المعتبرة والعبارات الجبرية

2) أثبت أن $x^2+y^2=a$ و $xy=\frac{\sqrt{b}}{2}$ ، 3) أثبت أن $x+y=\sqrt{a+\sqrt{b}}$ و $x-y=\sqrt{a-\sqrt{b}}$

4) استنتج أن $\sqrt{\frac{7+\sqrt{45}}{2}}+\sqrt{\frac{7-\sqrt{45}}{2}}=3$ وأن $\sqrt{\frac{4+\sqrt{7}}{2}}-\sqrt{\frac{4-\sqrt{7}}{2}}=1$

تمريـن عــدد 17: نعتبر العبارة التالية: $A=\left(\frac{\sqrt{a}}{a}+\frac{\sqrt{b}}{b}\right)^2$ حيث $a\in IR_+^*$ ، $b\in IR_+^*$ و $\frac{1}{b}=a$.

1) أثبت أن $A=2+\frac{1}{a}+\frac{1}{b}$ ، 2) استنتج أن $\frac{1}{\sqrt{a}}+\frac{1}{\sqrt{b}}=\sqrt{2+\frac{1}{a}+\frac{1}{b}}$ ، 3) احسب $\frac{\sqrt{5+2\sqrt{6}}}{5+2\sqrt{6}}+\frac{\sqrt{5-2\sqrt{6}}}{5-2\sqrt{6}}$

تمريـن عــدد 18: نعتبر العددين الحقيقيين a و b بحيث $a=\sqrt{54}-\sqrt{24}-\frac{1}{2}\sqrt{20}$ و $b=\sqrt{600}-\sqrt{486}+\sqrt{5}$

1) بين أن $a=\sqrt{6}-\sqrt{5}$ و $b=\sqrt{6}+\sqrt{5}$

2) احسب الجذاء ab ثم استنتج أن a مقلوب b

3) احسب a^2 ; b^2

4) استنتج $\frac{b}{a}-\frac{a}{b}$ و $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}$.

تمريـن عــدد 19:

1) نعتبر العدد الحقيقي $a=\sqrt{125}-\sqrt{20}-1$. أ) بين أن $a=3\sqrt{5}-1$ ، ب) أثبت أن a عدد موجب

2) ليكن العدد الحقيقي $b=6+4\sqrt{5}$. أ) أحسب ab ، ب) بين أن $(b-a)^2=ab$ ، ج) استنتج أن $\frac{1}{a}-\frac{1}{b}=\frac{1}{b-a}$

تمريـن عــدد 20:

1) نعتبر العبارة $A=x^2+2x+\frac{8}{9}$.

أ) احسب A في حالة $x=0$ ثم في حالة $x=-2$ ، ب) بين أن $A=(x+1)^2-\frac{1}{9}$ ، ج) فكك العبارة A إلى جذاء عوامل

2) لتكن العبارة $B=3x^2+5x+\frac{4}{3}$ حيث $x\in IR$.

أ) بين أن $B=(3x+1)\left(x+\frac{4}{3}\right)$ ، ب) في حالة $B\neq 0$ ، اختصر العبارة $\frac{A}{B}$

تمريـن عــدد 21: 1) نعتبر العبارة $A=x^2-\left(29-4\sqrt{7}\right)$ حيث $x\in IR$

أ) اكتب العدد $29-4\sqrt{7}$ في صيغة $(a-b)^2$ ، ب) فكك العبارة A إلى جذاء عوامل

2) لتكن العبارة $B=2\left(x+\sqrt{7}\right)\left(x-1+2\sqrt{7}\right)$ حيث $x\in IR$. فكك إلى جذاء عوامل العبارة $A+B$

تمريـن عــدد 22: 1) نعتبر العبارة $E=\left(1+\sqrt{a}\right)\left(1-\sqrt{a}+a-a\sqrt{a}\right)$ حيث $a\in IR_+$.

أ) بين أن $E=1-a^2$

ب) احسب العبارة E في حالة $a=\sqrt{2}$ ثم في حالة $a=2\sqrt{3}$ ثم في حالة $a=\sqrt{5}+1$ ثم في حالة $a=3\sqrt{2}-1$

2) لتكن $F=a+1+2\sqrt{a}$ حيث $a\in IR_+$.

6-الجذاءات المعتبرة والعبارات الجبرية

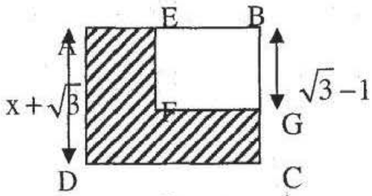
أ) فكك العبارة F إلى جذاء عوامل ، ب) اختصر العبارة $\frac{E}{F}$

تمرين عـــدد 23:

نعتبر العبارتين $A=\frac{1}{4}\left[(a+b)^2-(a-b)^2\right]$ و $B=\frac{1}{2}\left[(a+b)^2+(a-b)^2\right]$ حيث $a\in IR$ و $b\in IR$

1) بين أن $A=ab$ و $B=a^2+b^2$

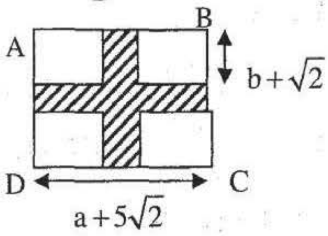
2) احسب: $\left(\frac{\sqrt{5}-2\sqrt{3}}{2}\right)^2-\left(\frac{\sqrt{5}+2\sqrt{3}}{2}\right)^2$ ، $\left(\frac{3\sqrt{5}-\sqrt{3}}{\sqrt{2}}\right)^2+\left(\frac{3\sqrt{5}+\sqrt{3}}{\sqrt{2}}\right)^2$ ، $\left(\frac{1-5\sqrt{7}}{\sqrt{2}}\right)^2\left(\frac{1+5\sqrt{7}}{\sqrt{2}}\right)^2$



تمرين عـــدد 24: (وحدة القيس هي cm) في الشكل المقابل ABCD مربع طول ضلعه $x+\sqrt{3}$ و EFGB مربع طول ضلعه $\sqrt{3}-1$.

1) عبر بدلالة x عن المساحة المشطوبة

2) احسب المساحة المشطوبة في حالة $x=\sqrt{3}$ ثم في حالة $x=\sqrt{3}+1$



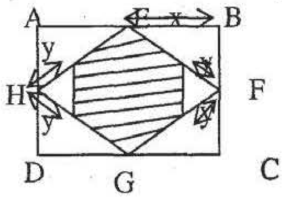
تمرين عـــدد 25:

(وحدة القيس هي cm)

1) عبر بدلالة a و b عن المساحة المشطوبة في الشكل المقابل حيث ABCD مربع طول ضلعه $a+5\sqrt{2}$.

2) فكك النتيجة إلى جذاء عوامل.

3) احسب المساحة المشطوبة في حالة $a=b=\sqrt{2}$ ثم في حالة $a=\sqrt{2}+1$ و $b=\sqrt{2}-1$

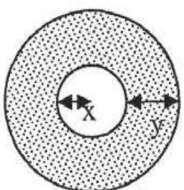


تمرين عـــدد 26: (وحدة القيس هي cm)

1) عبر بدلالة x و y عن المساحة المشطوبة في الشكل المقابل حيث ABCD مربع و EFGH مربع E منتصف [AB]؛ F منتصف [BC]، G منتصف [DC] و H منتصف [AD]

2) فكك النتيجة إلى جذاء عوامل.

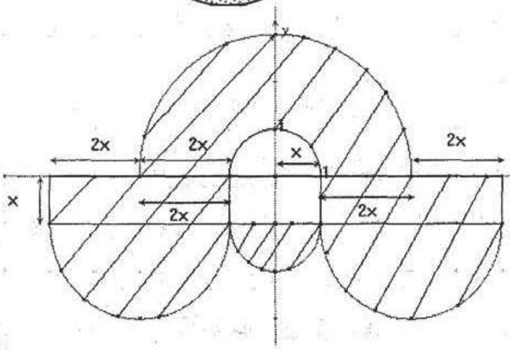
3) احسب المساحة المشطوبة في حالة $x=\sqrt{3}+1$ و $y=\sqrt{3}-1$



تمرين عـــدد 27:(وحدة القيس هي cm)

1) عبر بدلالة x و y عن المساحة المشطوبة في الشكل المقابل

2) فكك العبارة المتحصل عليها إلى جذاء عوامل.



تمرين عـــدد 28: (وحدة القيس هي cm)

بين أن المساحة المشطوبة في الشكل التالي تساوي $\left(\frac{17\pi}{2}+8\right)x^2$ احسب المساحة المشطوبة في حالة $x=\sqrt{5}$ ثم في حالة $x=\sqrt{11}$ (القيمة التقريبية لـ π تساوي 3.14)

موقع مراجعة اعدادي
COLLEGE.MOURAJAA.COM

6-الجذاءات المعتبرة والعبارات الجبرية

تمرين عدد 29: نعتبر m و n عددان صحيحان طبيعيان حيث $n\geq 3$ و $m\geq 3$ و a و b عددان صحيحان طبيعيان حيث $a+\frac{1}{a}=\sqrt{n}$ و $b+\frac{1}{b}=\sqrt{m}$.

1) انشر $\left(a+\frac{1}{a}\right)^2$ ثم استنتج $a^2+\frac{1}{a^2}$ بدلالة n.

2) انشر $\left(b+\frac{1}{b}\right)^3$ ثم استنتج $b^3+\frac{1}{b^3}$ بدلالة n.

3) بين إذا كان $m=n$ فإن $a=b$ أو a مقلوب b.

تمرين عدد 30: x و y عددان حقيقيان بحيث $x+y=3$. بين أن $-2x^2+3y^2\geq -54$

تمرين عدد 31: x و y عددان حقيقيان بحيث $\frac{x-y}{x+y}>0$.

1) انشر $\left[\sqrt{\frac{x-y}{x+y}}+\sqrt{\frac{x+y}{x-y}}\right]^2$ ، 2) استنتج $\left[\sqrt{\frac{\sqrt{7}-2}{\sqrt{7}+2}}+\sqrt{\frac{\sqrt{7}+2}{\sqrt{7}-2}}\right]^2$

تمرين عدد 32: 1) انشر $(n+1)^2$ حيث $n\in\mathbb{N}$

2) استنتج أن: $1+2+3+4+...+n=\frac{n(n+1)}{2}$

3) احسب: $1-2^2+3^2-4^2+5^2-6^2+.....+(2009)^2-(2010)^2$

تمرين عدد 33: نعتبر $A=\frac{\sqrt{5}-1}{2}$

1) بين أن $A^2+A-1=0$ ، 2) استنتج أن $\frac{1}{A}=A+1$ ، 3) بين أن $\frac{\sqrt{A}}{\sqrt{A+1}}+\frac{\sqrt{A+1}}{\sqrt{A}}=\sqrt{5}$

تمرين عدد 34: 1) $n\in\mathbb{N}$ ، أثبت أن $(1+n)^4=n^4+4n^3+6n^2+4n+1$

2) باستعمال السؤال عدد 1) ؛ جد p حيث $14641=p^2$

تمرين عدد 35:

$x=\underbrace{999.......9}_{100 \text{ مرة } 9}$. ما هو مجموع الأرقام المكونة لـ x^2

تمرين عدد 36: 1) فكك إلى جذاء عوامل $x^2-1-\frac{x^4}{4}$ و x^8-1

2) فكك إلى جذاء عوامل العبارة $A=x^8-1-\frac{x^4}{4}(x^2+1)(x^4+1)$ ، 3) استنتج أن $\mathbf{A\leq 0}$

تمرين عدد 37: 1) فكك إلى جذاء عوامل العبارة $\mathbf{A=4x-2}+(2x-1)(3x-4)$

2) نعتبر العبارة $B=2\left|1-x^2\right|-\left|3x-1\right|+2$ حيث $x>1$

أ) أثبت أن $1-x^2<0$ و $3x-1>0$ ، ب) أثبت أن $\mathbf{B=(2x-1)(x-1)}$

ج) فكك إلى جذاء عوامل $A-B$ ، د) أثبت أن $A>B$.

تمرين عـ01ـدد:

$$\left(1-\sqrt{3}\right)^2=1-2\sqrt{3}+\left(\sqrt{3}\right)^2=1-2\sqrt{3}+3=4-2\sqrt{3} \text{ ، } \left(\sqrt{2}+1\right)^2=\left(\sqrt{2}\right)^2+2\sqrt{2}+1=2+2\sqrt{2}+1=3+2\sqrt{2}$$

$$\left(3\sqrt{2}-1\right)\left(3\sqrt{2}+1\right)=\left(3\sqrt{2}\right)^2-1^2=9\times2-1=18-1=17 \text{ ، } \left(\sqrt{3}+\sqrt{2}\right)\left(\sqrt{3}-\sqrt{2}\right)=\left(\sqrt{3}\right)^2-\left(\sqrt{2}\right)^2=3-2=1$$

$$\left(3+2\sqrt{2}\right)^2=3^2+2\times3\times2\sqrt{2}+\left(2\sqrt{2}\right)^2=9+12\sqrt{2}+4\times2=9+12\sqrt{2}+8=17+12\sqrt{2}$$

$$\left(2\sqrt{3}-3\right)^2=\left(2\sqrt{3}\right)^2-2\times2\sqrt{3}\times3+3^2=4\times3-12\sqrt{3}+9=12-12\sqrt{3}+9=21-12\sqrt{3}$$

$$\left[1-\left(\sqrt{2}+\sqrt{3}\right)\right]\left[1+\left(\sqrt{2}+\sqrt{3}\right)\right]=1^2-\left(\sqrt{2}+\sqrt{3}\right)^2=1-\left(\left(\sqrt{2}\right)^2+2\sqrt{2}\times\sqrt{3}+\left(\sqrt{3}\right)^2\right)=1-\left(2+2\sqrt{6}+3\right)=1-2-2\sqrt{6}-3=-4-2\sqrt{6}$$

$$\left[\sqrt{2}-\left(\sqrt{3}-\sqrt{5}\right)\right]\left[\sqrt{2}+\left(\sqrt{3}-\sqrt{5}\right)\right]=\left(\sqrt{2}\right)^2-\left(\sqrt{3}-\sqrt{5}\right)^2=2-\left(\left(\sqrt{3}\right)^2-2\sqrt{3}\times\sqrt{5}+\left(\sqrt{5}\right)^2\right)=2-3+2\sqrt{15}-5=-6+2\sqrt{15}$$

$$\left[2-\sqrt{2}+\sqrt{3}\right]\left[2+\sqrt{2}-\sqrt{3}\right]=\left[2-\left(\sqrt{2}-\sqrt{3}\right)\right]\left[2+\left(\sqrt{2}-\sqrt{3}\right)\right]=2^2-\left(\sqrt{2}-\sqrt{3}\right)^2=4-\left(\left(\sqrt{2}\right)^2-2\sqrt{2}\times\sqrt{3}+\left(\sqrt{3}\right)^2\right)=4-2+2\sqrt{6}-3=-1+2\sqrt{6}$$

تمرين عـ02ـدد: 1) $(x+y)(x-y)=x^2-y^2$ ☒ ، 2) $a=b^2-1$ ☒

تمرين عـ03ـدد: 1) * $(x+1)^2=x^2+2x+1$ ، * $(x-1)^2=x^2-2x+1$ ، * $(x+1)(x-1)=x^2-1$

2) * $101^2=(100+1)^2=100^2+2\times100+1=10000+200+1=10201$

* $99^2=(100-1)^2=100^2-2\times100+1=10000-200+1=9801$

* $101\times99=(100+1)(100-1)=100^2-1=9999$

تمرين عـ04ـدد:

$$\left(2x-\sqrt{2}\right)\left(2x+\sqrt{2}\right)=(2x)^2-\left(\sqrt{2}\right)^2=4x^2-2 \text{ ، } \left(x+\sqrt{5}\right)^2=x^2+2\sqrt{5}x+5 \text{ ، } \left(\sqrt{7}-x\right)^2=7-2\sqrt{7}x+x^2$$

$$\left(\frac{1}{2}x-1\right)^2=\frac{1}{4}x^2-x+1 \text{ ، } \left(x^2+2\right)^2=\left(x^2\right)^2+4x^2+4=x^4+4x^2+4 \text{ ، } \left(x^3-1\right)\left(x^3+1\right)=\left(x^3\right)^2-1=x^6-1$$

$$\left(x-\sqrt{2}+\sqrt{3}\right)\left(x+\sqrt{2}+\sqrt{3}\right)=\left(x-\left(\sqrt{2}-\sqrt{3}\right)\right)\left(x+\left(\sqrt{2}-\sqrt{3}\right)\right)=x^2-\left(\sqrt{2}-\sqrt{3}\right)^2=x^2-\left(\left(\sqrt{2}\right)^2-2\sqrt{2}\times\sqrt{3}+\left(\sqrt{3}\right)^2\right)=x^2-2+2\sqrt{6}-3=x^2+2\sqrt{6}-5$$

$$\begin{aligned}\left(\sqrt{3}-\sqrt{2}\right)\left(2x-\sqrt{5}\right)\left(\sqrt{3}+\sqrt{2}\right)\left(2x+\sqrt{5}\right)&=\left[\left(\sqrt{3}-\sqrt{2}\right)\left(\sqrt{3}+\sqrt{2}\right)\right]\left[\left(2x-\sqrt{5}\right)\left(2x+\sqrt{5}\right)\right]\\&=\left[\left(\sqrt{3}\right)^2-\left(\sqrt{2}\right)^2\right]\left[(2x)^2-\left(\sqrt{5}\right)^2\right]\\&=(3-2)\left(4x^2-5\right)=4x^2-5\end{aligned}$$

تمرين عـ05ـدد:

$$x^2-1=(x+1)(x-1) \text{ ، } x^2-9=(x+3)(x-3) \text{ ، } x^2+6x+9=(x+3)^2 \text{ ، } x^2-4x+4=(x-2)^2$$

$$x^2+2x+1=(x+1)^2 \text{ ، } 4x^2-25=(2x)^2-5^2=(2x-5)(2x+5) \text{ ، } 4x^2+12x+9=(2x+3)^2$$

$$9x^2-12x+4=(3x-2)^2 \text{ ، } x^2-2\sqrt{3}x+3=\left(x-\sqrt{3}\right)^2 \text{ ، } \frac{1}{4}x^2-x+1=\left(\frac{1}{2}x-1\right)^2 \text{ ، } x^4+2x^2+1=\left(x^2+1\right)^2$$

$$5x^2-3=\left(\sqrt{5}x\right)^2-\left(\sqrt{3}\right)^2=\left(\sqrt{5}x-\sqrt{3}\right)\left(\sqrt{5}x+\sqrt{3}\right) \text{ ، } (x+1)^2+2(x+1)+1=\left[(x+1)+1\right]^2=(x+2)^2$$

تمرين عـ06ـدد:

$$\frac{5}{\sqrt{3}}=\frac{5\times\sqrt{3}}{\sqrt{3}\times\sqrt{3}}=\frac{5\sqrt{3}}{3} \quad ، \quad \frac{3}{\sqrt{3}-1}=\frac{3\times(\sqrt{3}+1)}{(\sqrt{3}-1)(\sqrt{3}+1)}=\frac{3\sqrt{3}+3}{(\sqrt{3})^2-1}=\frac{3\sqrt{3}+3}{3-1}=\frac{3\sqrt{3}+3}{2}$$

$$\frac{1}{\sqrt{2}+1}=\sqrt{2}-1 \quad ، \quad \frac{1}{2-\sqrt{5}}=\frac{2+\sqrt{5}}{(2+\sqrt{5})(2-\sqrt{5})}=\frac{2+\sqrt{5}}{2^2-(\sqrt{5})^2}=\frac{2+\sqrt{5}}{4-5}=-2-\sqrt{5}$$

$$\frac{\sqrt{2}}{2\sqrt{5}+\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{2}(2\sqrt{5}-\sqrt{3})}{(2\sqrt{5}+\sqrt{3})(2\sqrt{5}-\sqrt{3})}=\frac{2\sqrt{10}-\sqrt{6}}{(2\sqrt{5})^2-(\sqrt{3})^2}=\frac{2\sqrt{10}-\sqrt{6}}{20-3}=\frac{2\sqrt{10}-\sqrt{6}}{17}$$

$$\frac{\sqrt{2}+\sqrt{3}}{\sqrt{2}-\sqrt{3}}=\frac{(\sqrt{2}+\sqrt{3})(\sqrt{2}+\sqrt{3})}{(\sqrt{2}-\sqrt{3})(\sqrt{2}+\sqrt{3})}=\frac{(\sqrt{2})^2+2\sqrt{6}+(\sqrt{3})^2}{(\sqrt{2})^2-(\sqrt{3})^2}=\frac{2+2\sqrt{6}+3}{2-3}=\frac{5+2\sqrt{6}}{-1}=-(5+2\sqrt{6})$$

تمرين عـ07ـدد:

$$A=4x^2-4x+1+(3x+1)(2x-1)=(2x-1)^2+(3x+1)(2x-1)=(2x-1)[(2x-1)+(3x+1)]=(2x-1)(2x-1+3x+1)=(2x-1)5x$$

$$B=x^2-\frac{1}{4}+\left(x+\frac{1}{3}\right)\left(x-\frac{1}{2}\right)=\left(x-\frac{1}{2}\right)\left(x+\frac{1}{2}\right)+\left(x+\frac{1}{3}\right)\left(x-\frac{1}{2}\right)=\left(x-\frac{1}{2}\right)\left[\left(x+\frac{1}{2}\right)+\left(x+\frac{1}{3}\right)\right]=\left(x-\frac{1}{2}\right)\left(2x+\frac{5}{6}\right)$$

$$C=(2x+3)(4x-1)+4x^2+12x+9=(2x+3)(4x-1)+(2x+3)^2=(2x+3)(4x-1+2x+3)=(2x+3)(6x+2)$$

$$F=(x+1)^2-2y(x+1)+y^2-x+y-1=\left[(x+1)^2-2y(x+1)+y^2\right]-(x+1-y)=((x+1)-y)^2-(x+1-y)=(x+1-y)^2-(x+1-y)$$

$$=(x+1-y)((x+1-y)-1)=(x+1-y)(x+1-y-1)=(x+1-y)(x-y)$$

تمرين عـ08ـدد: $a+b=\sqrt{3}$ و $a-b=\sqrt{2}$

$$A=a^2+2ab+b^2-\sqrt{3}a-\sqrt{3}b=(a+b)^2-\sqrt{3}(a+b)=(\sqrt{3})^2-\sqrt{3}\times\sqrt{3}=3-3=0$$

$$B=2(a^2-b^2)-a^2+2ab-b^2=2(a-b)(a+b)-(a^2-2ab+b^2)=2(a-b)(a+b)-(a-b)^2=2\sqrt{2}\times\sqrt{3}-(\sqrt{2})^2=2\sqrt{6}-2$$

$$C=(a-\sqrt{3})^2-(b+\sqrt{2})^2+\sqrt{3}(b-a)=\left[(a-\sqrt{3})-(b+\sqrt{2})\right]\left[(a-\sqrt{3})+(b+\sqrt{2})\right]+\sqrt{3}(b-a)$$

$$=(a-\sqrt{3}-b-\sqrt{2})(a-\sqrt{3}+b+\sqrt{2})+\sqrt{3}(b-a)$$

$$=(a-b-\sqrt{3}-\sqrt{2})(a+b-\sqrt{3}+\sqrt{2})+\sqrt{3}(b-a)=(\sqrt{2}-\sqrt{3}-\sqrt{2})(\sqrt{3}-\sqrt{3}+\sqrt{2})-\sqrt{3}\times\sqrt{2}$$

$$=-\sqrt{3}\times\sqrt{2}-\sqrt{6}=-\sqrt{6}-\sqrt{6}=-2\sqrt{6}$$

$$D=b^2-(a-1)^2-\sqrt{3}+1=(b-(a-1))(b+(a-1))-\sqrt{3}+1=(b-a+1)(b+a-1)-\sqrt{3}+1$$

$$=(-\sqrt{2}+1)(\sqrt{3}-1)-\sqrt{3}+1=-\sqrt{6}+\sqrt{2}+\sqrt{3}-1-\sqrt{3}+1=-\sqrt{6}+\sqrt{2}$$

تمرين عـ09ـدد: (1 $A=(x+y)^2-2xy=x^2+2xy+y^2-2xy=x^2+y^2$

$B=(x-y)^2+2xy=x^2-2xy+y^2+2xy=x^2+y^2$ إذن $A=B=x^2+y^2$

(2 $(\sqrt{3}+\sqrt{2})^2-2\sqrt{6}=(\sqrt{3}+\sqrt{2})^2-2\sqrt{3}\times\sqrt{2}=\sqrt{3}^2+\sqrt{2}^2=3+2=5$ ،

$(\sqrt{3}-\sqrt{5})^2+2\sqrt{15}=(\sqrt{3}-\sqrt{5})^2+2\sqrt{5}\times\sqrt{3}=\sqrt{5}^2+\sqrt{3}^2=5+3=8$

تمرين عـ10ـدد:

$$a=\frac{1}{\sqrt{2}+1}+\frac{1}{\sqrt{2}-1}=\frac{\sqrt{2}-1}{(\sqrt{2}+1)(\sqrt{2}-1)}+\frac{\sqrt{2}+1}{(\sqrt{2}+1)(\sqrt{2}-1)}=\frac{\sqrt{2}-1+\sqrt{2}+1}{(\sqrt{2})^2-1}=\frac{2\sqrt{2}}{2-1}=2\sqrt{2}$$

$$b=\frac{1}{\sqrt{3}-2}-\frac{1}{\sqrt{3}+2}=\frac{(\sqrt{3}+2)-(\sqrt{3}-2)}{(\sqrt{3}+2)(\sqrt{3}-2)}=\frac{\sqrt{3}+2-\sqrt{3}+2}{(\sqrt{3})^2-2^2}=\frac{4}{3-4}=-4$$

$$c=\frac{\sqrt{3}+2}{\sqrt{3}-2}-\frac{\sqrt{3}-2}{2+\sqrt{3}}=\frac{(\sqrt{3}+2)(2+\sqrt{3})-(\sqrt{3}-2)(\sqrt{3}-2)}{(\sqrt{3}-2)(2+\sqrt{3})}=\frac{(\sqrt{3}^2+4\sqrt{3}+4)-(\sqrt{3}^2-4\sqrt{3}+4)}{\sqrt{3}^2-2^2}=\frac{(3+4\sqrt{3}+4)-(3-4\sqrt{3}+4)}{3-4}=-8\sqrt{3}$$ ،

$$d=\frac{\dfrac{1-\sqrt{2}}{\sqrt{3}+2}}{\dfrac{\sqrt{3}-2}{1+\sqrt{2}}}=\frac{1-\sqrt{2}}{\sqrt{3}+2}\times\frac{1-\sqrt{2}}{\sqrt{3}-2}=\frac{(1-\sqrt{2})(1+\sqrt{2})}{(\sqrt{3}+2)(\sqrt{3}-2)}=\frac{1-\sqrt{2}^2}{\sqrt{3}^2-2^2}=\frac{1-2}{3-4}=1$$

$$e=\frac{\dfrac{\sqrt{2}}{2}\left(\dfrac{\sqrt{5}-2\sqrt{7}}{2-3\sqrt{2}}\right)}{\dfrac{1}{\sqrt{2}}\left(\dfrac{3\sqrt{2}+2}{2\sqrt{7}+\sqrt{5}}\right)}=\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\times\sqrt{2}\right)\times\frac{\sqrt{5}-2\sqrt{7}}{2-3\sqrt{2}}\times\frac{2\sqrt{7}+\sqrt{5}}{3\sqrt{2}+2}=\frac{2}{2}\times\frac{(\sqrt{5}-2\sqrt{7})(2\sqrt{7}+\sqrt{5})}{(2-3\sqrt{2})(3\sqrt{2}+2)}=\frac{(\sqrt{5})^2-(2\sqrt{7})^2}{2^2-(3\sqrt{2})^2}=\frac{5-28}{4-18}=\frac{23}{14}$$

تمرين عـ11ـدد:

(1 $5+2\sqrt{6}=2+3+2\sqrt{3}\times\sqrt{2}=(\sqrt{3}+\sqrt{2})^2$ ، $5-2\sqrt{6}=2-2\sqrt{3}\sqrt{2}+3=(\sqrt{2}-\sqrt{3})^2$

$12+2\sqrt{35}=7+5+2\sqrt{5}\times\sqrt{7}=(\sqrt{7}+\sqrt{5})^2$ ، $11-6\sqrt{2}=9+2-2\times3\sqrt{2}=(3-\sqrt{2})^2$

$27+10\sqrt{2}=25+2+2\times5\sqrt{2}=(5+\sqrt{2})^2$ ، $27-10\sqrt{2}=25+2-2\times5\sqrt{2}=(5-\sqrt{2})^2$

$14+4\sqrt{10}=10+4+2\times2\sqrt{10}=(\sqrt{10}+2)^2$ ، $14-4\sqrt{10}=10+4-2\times2\sqrt{10}=(\sqrt{10}-2)^2$

(2 $\sqrt{27+10\sqrt{2}}+\sqrt{27-10\sqrt{2}}=\sqrt{(5+\sqrt{2})^2}+\sqrt{(5-\sqrt{2})^2}=|5+\sqrt{2}|+|5-\sqrt{2}|=(5+\sqrt{2})+(5-\sqrt{2})=10$

$\sqrt{14-4\sqrt{10}}+\sqrt{14+4\sqrt{10}}=\sqrt{(\sqrt{10}-2)^2}+\sqrt{(\sqrt{10}+2)^2}=|\sqrt{10}-2|+|\sqrt{10}+2|=(\sqrt{10}-2)+(\sqrt{10}+2)=2\sqrt{10}$.

تمرين عـ12ـدد: (1

$$E=\left(\frac{a+b}{2}\right)^2-\left(\frac{a-b}{2}\right)^2=\left[\left(\frac{a+b}{2}\right)-\left(\frac{a-b}{2}\right)\right]\left[\left(\frac{a+b}{2}\right)+\left(\frac{a-b}{2}\right)\right]$$

$$=\left[\frac{(a+b)-(a-b)}{2}\right]\left[\frac{(a+b)+(a-b)}{2}\right]=\left(\frac{a+b-a+b}{2}\right)\left(\frac{a+b+a-b}{2}\right)=\frac{2b}{2}\times\frac{2a}{2}=b\times a=ab$$

2) اعتمادا على السؤال (1) لدينا: $\left(\frac{5\sqrt{2}+2\sqrt{5}}{2}\right)^2-\left(\frac{5\sqrt{2}-2\sqrt{5}}{2}\right)^2=5\sqrt{2}\times2\sqrt{5}=(5\times2)\times(\sqrt{2}\times\sqrt{5})=10\sqrt{10}$

$$\left(\frac{3^{-39}+3^{39}}{2}\right)^2-\left(\frac{3^{-39}+3^{39}}{2}\right)^2=3^{-39}\times3^{39}=3^{-39+39}=3^0=1$$

تمرين عـ13ـدد:

1) $xy=\sqrt{2\sqrt{5}+\sqrt{19}}\times\sqrt{2\sqrt{5}-\sqrt{19}}=\sqrt{(2\sqrt{5}+\sqrt{19})(2\sqrt{5}-\sqrt{19})}=\sqrt{(2\sqrt{5})^2-(\sqrt{19})^2}=\sqrt{20-19}=\sqrt{1}=1$

$$(x+y)^2=\left(\sqrt{2\sqrt{5}+\sqrt{19}}+\sqrt{2\sqrt{5}-\sqrt{19}}\right)^2$$

$$=\sqrt{2\sqrt{5}+\sqrt{19}}^2+2\sqrt{2\sqrt{5}+\sqrt{9}}\times\sqrt{2\sqrt{5}-\sqrt{19}}+\sqrt{2\sqrt{5}-\sqrt{19}}^2$$

$$=2\sqrt{5}+\sqrt{19}+2\times1+2\sqrt{5}-\sqrt{19}=(2\sqrt{5}+2\sqrt{5})+(\sqrt{19}-\sqrt{19})+2=4\sqrt{5}+2$$

$$(x-y)^2=\left(\sqrt{2\sqrt{5}+\sqrt{19}}-\sqrt{2\sqrt{5}-\sqrt{19}}\right)^2=\sqrt{2\sqrt{5}+\sqrt{19}}^2-2\sqrt{2\sqrt{5}+\sqrt{9}}\times\sqrt{2\sqrt{5}-\sqrt{19}}+\sqrt{2\sqrt{5}-\sqrt{19}}^2$$

$$=2\sqrt{5}+\sqrt{19}-2\times1+2\sqrt{5}-\sqrt{19}=4\sqrt{5}-2$$

2) $\frac{x+y}{x-y}=\frac{(x+y)(x-y)}{(x-y)(x-y)}=\frac{x^2-y^2}{(x-y)^2}=\frac{\sqrt{2\sqrt{5}+\sqrt{9}}^2-\sqrt{2\sqrt{5}-\sqrt{19}}^2}{4\sqrt{5}-2}=\frac{(2\sqrt{5}+\sqrt{19})-(2\sqrt{5}-\sqrt{19})}{4\sqrt{5}-2}$

$$=\frac{2\sqrt{5}+\sqrt{19}-2\sqrt{5}+\sqrt{19}}{4\sqrt{5}-2}=\frac{2\sqrt{19}}{4\sqrt{5}-2}=\frac{\sqrt{19}}{2\sqrt{5}-1}$$

تمرين عـ14ـدد: 1) لدينا $a\geq0$ ، $b\geq0$ و $a\leq b$ لذا $\sqrt{a}\geq0$ ، $\sqrt{b}\geq0$ و ($\sqrt{a}\leq\sqrt{b}$ يعني $\sqrt{b}-\sqrt{a}\geq0$) إذن:

$$2\sqrt{a}\left(\sqrt{b}-\sqrt{a}\right)\geq0$$

2) $2A\sqrt{a}=2\left(\sqrt{b}-\sqrt{a}\right)\sqrt{a}=2\left(\sqrt{b}\times\sqrt{a}-\sqrt{a}\times\sqrt{a}\right)=2\left(\sqrt{ab}-a\right)$

3) $B^2-A^2=\left(\sqrt{b-a}\right)^2-\left(\sqrt{b}-\sqrt{a}\right)^2=(b-a)-\left(\sqrt{b}^2-2\sqrt{ab}+\sqrt{a}^2\right)=(b-a)-\left(b-2\sqrt{ab}+a\right)$

$$=b-a-b+2\sqrt{ab}-a=-2a+2\sqrt{ab}=2\left(\sqrt{ab}-a\right)=2A\sqrt{a}$$

4) لدينا $A=\sqrt{b}-\sqrt{a}\geq0$ لذا $2A\sqrt{a}\geq0$ إذن $B^2-A^2=2A\sqrt{a}\geq0$ يعني $B^2\geq A^2$ وبما أن $A\geq0$ و $B\geq0$ فإن $B\geq A$

5) نعتبر $a=2-\sqrt{3}$ و $b=7-2\sqrt{3}$ ، $b-a=\left(7-2\sqrt{3}\right)-\left(2-\sqrt{3}\right)=5-\sqrt{3}$ وبما أن $\sqrt{b-a}\geq\sqrt{b}-\sqrt{a}$ فإن $\sqrt{5-\sqrt{3}}\geq\sqrt{7-2\sqrt{3}}-\sqrt{2-\sqrt{3}}$ (حسب السؤال 4).

تمرين عـ15ـدد: 1) $a^2=\left(\sqrt{3-2\sqrt{2}}\right)^2=3-2\sqrt{2}$ ، $b^2=\left(\sqrt{3+2\sqrt{2}}\right)^2=3+2\sqrt{2}$

$$ab=\sqrt{3-2\sqrt{2}}\times\sqrt{3+2\sqrt{2}}=\sqrt{(3-2\sqrt{2})(3+2\sqrt{2})}=\sqrt{3^2-(2\sqrt{2})^2}=\sqrt{9-8}=\sqrt{1}=1$$

2) بما أن $ab=1$ فإن a مقلوب b.

3) $(a+b)^2=a^2+2ab+b^2=\left(3-2\sqrt{2}\right)+2\times1+\left(3+2\sqrt{2}\right)=3-2\sqrt{2}+2+3+2\sqrt{2}=8$

$(a-b)^2=a^2-2ab+b^2=(3-2\sqrt{2})-2\times1+(3+2\sqrt{2})=3-2\sqrt{2}-2+3+2\sqrt{2}=4$

4) لدينا $(a+b)^2=8$ يعني $\sqrt{(a+b)^2}=\sqrt{8}$ ، يعني $|a+b|=2\sqrt{2}$ ، يعني $a+b=2\sqrt{2}$ (لأن $a+b\geq 0$) لذا $\sqrt{3+2\sqrt{2}}+\sqrt{3-2\sqrt{2}}=2\sqrt{2}$. لدينا كذلك: $(a-b)^2=4$ يعني $\sqrt{(a-b)^2}=\sqrt{4}$ ، يعني $|a-b|=2$ ، يعني $a-b=2$ (لأن $a-b\geq 0$) لذا $\sqrt{3+2\sqrt{2}}-\sqrt{3-2\sqrt{2}}=2$.

تمرين عـ16ـدد:

1) لدينا $a^2-b<a^2$ يعني $\sqrt{a^2-b}<\sqrt{a^2}$ يعني $\sqrt{a^2-b}<|a|$ يعني $\sqrt{a^2-b}<a$ (لأن $a\in IR_+$)

(2

$$x^2+y^2=\left(\sqrt{\frac{a+\sqrt{a^2-b}}{2}}\right)^2+\left(\sqrt{\frac{a-\sqrt{a^2-b}}{2}}\right)^2=\frac{a+\sqrt{a^2-b}}{2}+\frac{a-\sqrt{a^2-b}}{2}=\frac{a+\sqrt{a^2-b}+a-\sqrt{a^2-b}}{2}=\frac{2a}{2}=a$$

$$xy=\sqrt{\frac{a+\sqrt{a^2-b}}{2}}\times\sqrt{\frac{a-\sqrt{a^2-b}}{2}}=\sqrt{\frac{(a+\sqrt{a^2-b})\times(a-\sqrt{a^2-b})}{4}}=\sqrt{\frac{a^2-(\sqrt{a^2-b})^2}{4}}=\sqrt{\frac{a^2-(a^2-b)^2}{4}}=\sqrt{\frac{b}{4}}=\frac{\sqrt{b}}{\sqrt{4}}=\frac{\sqrt{b}}{2}$$

3) لدينا $(x+y)^2=x^2+2xy+y^2$ يعني $\sqrt{(x+y)^2}=\sqrt{x^2+2xy+y^2}$ يعني $|x+y|=\sqrt{x^2+2xy+y^2}$ وبالتالي $x+y=\sqrt{x^2+2xy+y^2}$ (لأن $x+y\geq 0$). وبما أن $x^2+y^2=a$ و $xy=\frac{\sqrt{b}}{2}$ فإن $x+y=\sqrt{a+2\frac{\sqrt{b}}{2}}=\sqrt{a+\sqrt{b}}$ إذن $x+y=\sqrt{a+\sqrt{b}}$ ولدينا كذلك $(x-y)^2=x^2-2xy+y^2$ يعني $\sqrt{(x-y)^2}=\sqrt{x^2-2xy+y^2}$ يعني $|x-y|=\sqrt{x^2-2xy+y^2}$ إذن $x-y=\sqrt{x^2-2xy+y^2}$ (لأن $x-y\geq 0$). وبما أن $x^2+y^2=a$ و $xy=\frac{\sqrt{b}}{2}$ فإن $x-y=\sqrt{a-2\frac{\sqrt{b}}{2}}=\sqrt{a-\sqrt{b}}$ وبالتالي $x-y=\sqrt{a-\sqrt{b}}$

4) $\sqrt{\frac{7+\sqrt{45}}{2}}+\sqrt{\frac{7-\sqrt{45}}{2}}=\sqrt{\frac{7+\sqrt{49-4}}{2}}+\sqrt{\frac{7-\sqrt{49-4}}{2}}$ بالاعتماد على السؤال 3 لدينا $a=7$ و $b=4$ فنتحصل على: $\sqrt{\frac{7+\sqrt{49-4}}{2}}+\sqrt{\frac{7-\sqrt{49-4}}{2}}=\sqrt{7+\sqrt{4}}=\sqrt{7+2}=\sqrt{9}=3$ ،

$\sqrt{\frac{4+\sqrt{7}}{2}}-\sqrt{\frac{4-\sqrt{7}}{2}}=\sqrt{\frac{4+\sqrt{16-9}}{2}}-\sqrt{\frac{4-\sqrt{16-9}}{2}}$ بالاعتماد على السؤال 3 لدينا $a=4$ و $b=9$ فنتحصل على: $\sqrt{\frac{4+\sqrt{16-9}}{2}}-\sqrt{\frac{4-\sqrt{16-9}}{2}}=\sqrt{4-\sqrt{9}}=\sqrt{4-3}=\sqrt{1}=1$

تمرين عـ17ـدد: 1) $A=\left(\frac{\sqrt{a}}{a}+\frac{\sqrt{b}}{b}\right)^2=\left(\frac{\sqrt{a}}{a}\right)^2+2\frac{\sqrt{a}}{a}\frac{\sqrt{b}}{b}+\left(\frac{\sqrt{b}}{b}\right)^2=\frac{a}{a^2}+2\frac{\sqrt{ab}}{ab}+\frac{b}{b^2}=\frac{1}{a}+2\frac{\sqrt{ab}}{ab}+\frac{1}{b}$

وبما أن $\frac{1}{b}=a$ فإن $ab=1$ لذا $A=\frac{1}{a}+2\frac{\sqrt{ab}}{ab}+\frac{1}{b}=\frac{1}{a}+\frac{2\times\sqrt{1}}{1}+\frac{1}{b}=\frac{1}{a}+2+\frac{1}{b}$

2) لدينا $A=\left(\frac{\sqrt{a}}{a}+\frac{\sqrt{b}}{b}\right)^2=2+\frac{1}{a}+\frac{1}{b}$ لذا $\sqrt{\left(\frac{\sqrt{a}}{a}+\frac{\sqrt{b}}{b}\right)^2}=\sqrt{2+\frac{1}{a}+\frac{1}{b}}$ يعني $\left|\frac{\sqrt{a}}{a}+\frac{\sqrt{b}}{b}\right|=\sqrt{2+\frac{1}{a}+\frac{1}{b}}$ يعني

$\frac{\sqrt{a}}{a}+\frac{\sqrt{b}}{b}=\sqrt{2+\frac{1}{a}+\frac{1}{b}}$ (لأن $\frac{\sqrt{a}}{a}+\frac{\sqrt{b}}{b}>0$) ونعلم أن $\frac{1}{\sqrt{a}}=\frac{\sqrt{a}}{a}$ و $\frac{1}{\sqrt{b}}=\frac{\sqrt{b}}{b}$ إذن $\frac{1}{\sqrt{a}}+\frac{1}{\sqrt{b}}=\sqrt{2+\frac{1}{a}+\frac{1}{b}}$

3) لدينا $\frac{1}{\sqrt{5+2\sqrt{2}}}=\frac{5+2\sqrt{2}}{\left(5+2\sqrt{2}\right)\sqrt{5+2\sqrt{2}}}=\frac{\sqrt{5+2\sqrt{2}}\times\sqrt{5+2\sqrt{2}}}{\left(5+2\sqrt{2}\right)\sqrt{5+2\sqrt{2}}}=\frac{\sqrt{5+2\sqrt{2}}}{5+2\sqrt{2}}$ وبنفس الطريقة

$\frac{1}{\sqrt{5-2\sqrt{2}}}=\frac{\sqrt{5-2\sqrt{2}}}{5-2\sqrt{2}}$ بالاعتماد على السؤال (2) نعتبر $a=5+2\sqrt{6}$ و $b=5-2\sqrt{6}$ فنتحصل على

$$\frac{1}{\sqrt{5+2\sqrt{6}}}+\frac{1}{\sqrt{5-2\sqrt{6}}}=\sqrt{2+\frac{1}{5+2\sqrt{6}}+\frac{1}{5-2\sqrt{6}}}=\sqrt{2+\frac{5-2\sqrt{6}}{\left(5+2\sqrt{6}\right)\left(5-2\sqrt{6}\right)}+\frac{5+2\sqrt{6}}{\left(5-2\sqrt{6}\right)\left(5+2\sqrt{6}\right)}}=\sqrt{2+\frac{10}{25-24}}=\sqrt{12}$$

تمرين عـ18ـدد: 1)

$$a=\sqrt{54}-\sqrt{24}-\frac{1}{2}\sqrt{20}=\sqrt{9\times6}-\sqrt{6\times4}-\frac{1}{2}\sqrt{5\times4}=\sqrt{9}\times\sqrt{6}-\sqrt{6}\times\sqrt{4}-\frac{1}{2}\sqrt{4}\times\sqrt{5}=3\sqrt{6}-2\sqrt{6}-\frac{1}{2}\times2\sqrt{5}=\sqrt{6}-\sqrt{5}$$

$$b=\sqrt{600}-\sqrt{486}+\sqrt{5}=\sqrt{100\times6}-\sqrt{81\times6}+\sqrt{5}=\sqrt{100}\times\sqrt{6}-\sqrt{81}\times\sqrt{6}+\sqrt{5}=10\sqrt{6}-9\sqrt{6}+\sqrt{5}=\sqrt{6}+\sqrt{5}$$

2) $a\times b=\left(\sqrt{6}-\sqrt{5}\right)\left(\sqrt{6}+\sqrt{5}\right)=\sqrt{6}^2-\sqrt{5}^2=6-5=1$ بما أن $ab=1$ فإن a مقلوب b.

3) $a^2=\left(\sqrt{6}-\sqrt{5}\right)^2=\sqrt{6}^2-2\sqrt{6}\sqrt{5}+\sqrt{5}^2=6+5-2\sqrt{30}=11-2\sqrt{30}$

$b^2=\left(\sqrt{6}+\sqrt{5}\right)^2=\sqrt{6}^2+2\sqrt{6}\sqrt{5}+\sqrt{5}^2=6+5+2\sqrt{30}=11+2\sqrt{30}$

4) $\frac{a}{b}-\frac{b}{a}=\frac{a^2}{ab}-\frac{b^2}{ab}=\frac{a^2-b^2}{ab}=\frac{\left(11-2\sqrt{30}\right)-\left(11+2\sqrt{30}\right)}{1}=11-2\sqrt{30}-11-2\sqrt{30}=-4\sqrt{30}$

$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}=\frac{b}{ab}+\frac{a}{ab}=\frac{b+a}{ab}=\frac{\left(\sqrt{6}+\sqrt{5}\right)+\left(\sqrt{6}-\sqrt{5}\right)}{1}=\sqrt{6}+\sqrt{5}+\sqrt{6}-\sqrt{5}=2\sqrt{6}$

تمرين عـ19ـدد:

1) أ) $a=\sqrt{125}-\sqrt{20}-1=\sqrt{25\times5}-\sqrt{4\times5}-1=\sqrt{25}\times\sqrt{5}-\sqrt{4}\times\sqrt{5}-1=5\sqrt{5}-2\sqrt{5}-1=3\sqrt{5}-1$

ب) لدينا $3\sqrt{5}>1$ لذا $3\sqrt{5}-1>0$

2) $b=6+4\sqrt{5}$

أ) $ab=\left(3\sqrt{5}-1\right)\left(6+4\sqrt{5}\right)=6\times3\sqrt{5}+3\sqrt{5}\times4\sqrt{5}-6-4\sqrt{5}=18\sqrt{5}+12\times5-6-4\sqrt{5}=18\sqrt{5}-4\sqrt{5}+60-6=14\sqrt{5}+54$

ب) $(b-a)^2=\left[\left(6+4\sqrt{5}\right)-\left(3\sqrt{5}-1\right)\right]^2=\left(6+4\sqrt{5}-3\sqrt{5}+1\right)^2=\left(7+\sqrt{5}\right)^2=7^2+2\times7\sqrt{5}+\sqrt{5}^2=49+5+14\sqrt{5}=54+14\sqrt{5}$

إذن $(b-a)^2=ab$.

ج) $\frac{1}{a}-\frac{1}{b}=\frac{b}{ab}-\frac{a}{ab}=\frac{b-a}{ab}$ وبما أن $(b-a)^2=ab$ فإن $\frac{b-a}{ab}=\frac{b-a}{(b-a)^2}=\frac{1}{b-a}$ وبالتالي $\frac{1}{a}-\frac{1}{b}=\frac{1}{b-a}$

تمرين عـ20ـدد: 1) أ) في حالة $x=0$ ، $A=0^2+2\times0+\frac{8}{9}=0+0+\frac{8}{9}=\frac{8}{9}$

في حالة $x=-2$ ، $A=(-2)^2+2\times(-2)+\frac{8}{9}=4-4+\frac{8}{9}=\frac{8}{9}$

ب) $(x+1)^2-\frac{1}{9}=x^2+2x+1-\frac{1}{9}=x^2+2x+\frac{9}{9}-\frac{1}{9}=x^2+2x+\frac{8}{9}=A$ إذن $A=(x+1)^2-\frac{1}{9}$

ج) $A=(x+1)^2-\frac{1}{9}=(x+1)^2-\left(\frac{1}{3}\right)^2=\left[(x+1)-\frac{1}{3}\right]\left[(x+1)+\frac{1}{3}\right]=\left(x+1-\frac{1}{3}\right)\left(x+1+\frac{1}{3}\right)=\left(x+\frac{2}{3}\right)\left(x+\frac{4}{3}\right)$

2) أ) $(3x+1)\left(x+\frac{4}{3}\right)=3x\times x+\frac{4}{3}\times3x+x+\frac{4}{3}=3x^2+4x+x+\frac{4}{3}=3x^2+5x+\frac{4}{3}$ إذن $B=(3x+1)\left(x+\frac{4}{3}\right)$.

ب) $\frac{A}{B}=\frac{\left(x+\frac{2}{3}\right)\left(x+\frac{4}{3}\right)}{(3x+1)\left(x+\frac{4}{3}\right)}=\frac{x+\frac{2}{3}}{3x+1}$

تمرين عـ21ـدد 1) أ) $29-4\sqrt{7}=\sqrt{28}^2-2\sqrt{28}+1=\left(\sqrt{28}-1\right)^2$ ($\sqrt{28}=\sqrt{4\times7}=\sqrt{4}\times\sqrt{7}=2\sqrt{7}$)

ب) $A=x^2-\left(29-4\sqrt{7}\right)=x^2-\left(\sqrt{28}-1\right)^2=\left(x-\left(\sqrt{28}-1\right)\right)\left(x+\left(\sqrt{28}-1\right)\right)=\left(x-\sqrt{28}+1\right)\left(x+\sqrt{28}-1\right)=\left(x-2\sqrt{7}+1\right)\left(x+2\sqrt{7}-1\right)$

2) $A+B=\left(x-2\sqrt{7}+1\right)\left(x+2\sqrt{7}-1\right)+2\left(x+\sqrt{7}\right)\left(x-1+2\sqrt{7}\right)=\left(x+2\sqrt{7}-1\right)\left[\left(x-2\sqrt{7}+1\right)+2\left(x+\sqrt{7}\right)\right]=\left(x+2\sqrt{7}-1\right)\left(x-2\sqrt{7}+1+2x+2\sqrt{7}\right)=\left(x+2\sqrt{7}-1\right)(3x+1)$

تمرين عـ22ـدد:

1) أ) $E=\left(1+\sqrt{a}\right)\left(1-\sqrt{a}+a-a\sqrt{a}\right)=\left(1+\sqrt{a}\right)\left(1-\sqrt{a}+a\left(1-\sqrt{a}\right)\right)=(1+a)\left[\left(1+\sqrt{a}\right)\left(1-\sqrt{a}\right)\right]=\left(1-\sqrt{a}^2\right)(1+a)=(1-a)(1+a)=1-a^2$

ب) في حالة $a=\sqrt{2}$ ، $E=1-a^2=1-\left(\sqrt{2}\right)^2=1-2=-1$

في حالة $a=2\sqrt{3}$ ، $E=1-a^2=1-\left(2\sqrt{3}\right)^2=1-12=-11$

في حالة $a=\sqrt{5}+1$ ، $E=1-a^2=1-\left(\sqrt{5}+1\right)^2=1-\left(\sqrt{5}^2+2\sqrt{5}+1\right)=1-\left(6+2\sqrt{5}\right)=1-6-2\sqrt{5}=-5-2\sqrt{5}$

في حالة $a=3\sqrt{2}-1$ ،

$E=1-a^2=1-\left(3\sqrt{2}-1\right)^2=1-\left(\left(3\sqrt{2}\right)^2-2\times3\sqrt{2}+1\right)=1-\left(18-6\sqrt{2}+1\right)=1-\left(19-6\sqrt{2}\right)=1-19+6\sqrt{2}=-18+6\sqrt{2}$

2) أ) $F=a+1+2\sqrt{a}=\sqrt{a}^2+2\sqrt{a}+1=\left(\sqrt{a}+1\right)^2$

ب) $\frac{E}{F}=\frac{\left(1+\sqrt{a}\right)\left(1-\sqrt{a}+a-a\sqrt{a}\right)}{\left(1+\sqrt{a}\right)^2}=\frac{1-\sqrt{a}+a-a\sqrt{a}}{1+\sqrt{a}}=\frac{\left(1-\sqrt{a}\right)(1+a)}{1+\sqrt{a}}$

تمرين عـ23ـدد:

1) $A=\frac{1}{4}\left[(a+b)^2-(a-b)^2\right]=\frac{1}{4}\left[(a+b)-(a-b)\right]\left[(a+b)+(a-b)\right]=\frac{1}{4}(a+b-a+b)(a+b+a-b)=\frac{1}{4}(2b)(2a)=\frac{1}{4}\times4ab=ab$

$B=\frac{1}{2}\left[(a+b)^2+(a-b)^2\right]=\frac{1}{2}\left(a^2+2ab+b^2+a^2-2ab+b^2\right)=\frac{1}{2}\left(2a^2+2b^2\right)=\frac{1}{2}\times2\left(a^2+b^2\right)=a^2+b^2$

2) بالاعتماد على السؤال (1): نعتبر $a=\sqrt{5}$ و $b=2\sqrt{3}$، بما أن:

$\frac{1}{4}\left[(a+b)^2-(a-b)^2\right]=\left(\frac{a+b}{2}\right)^2-\left(\frac{a-b}{2}\right)^2=ab$ فإن: $\left(\frac{\sqrt{5}+2\sqrt{3}}{2}\right)^2-\left(\frac{\sqrt{5}-2\sqrt{3}}{2}\right)^2=\sqrt{5}\times2\sqrt{3}=2\sqrt{15}$.

و نعتبر $a=3\sqrt{5}$ و $b=\sqrt{3}$ بما أن $\frac{1}{2}\left[(a+b)^2+(a-b)^2\right]=\left(\frac{a+b}{\sqrt{2}}\right)^2+\left(\frac{a-b}{\sqrt{2}}\right)^2=a^2+b^2$ فإن

$$\left(\frac{3\sqrt{5}+\sqrt{3}}{2}\right)^2+\left(\frac{3\sqrt{5}-\sqrt{3}}{2}\right)^2=\left(3\sqrt{5}\right)^2+\left(\sqrt{3}\right)^2=45+3=48$$

بنفس الطريقة $\left(\frac{1+5\sqrt{7}}{\sqrt{2}}\right)^2+\left(\frac{1-5\sqrt{7}}{\sqrt{2}}\right)^2=1^2+\left(5\sqrt{7}\right)^2=1+175=176$.

تمرين عدد 24: نعتبر S المساحة المشطوبة

1) $S=\left(x+\sqrt{3}\right)^2-\left(\sqrt{3}-1\right)^2=\left[\left(x+\sqrt{3}\right)-\left(\sqrt{3}-1\right)\right]\left[\left(x+\sqrt{3}\right)+\left(\sqrt{3}-1\right)\right]=\left(x+\sqrt{3}-\sqrt{3}+1\right)\left(x+\sqrt{3}+\sqrt{3}-1\right)=\left(x+1\right)\left(x+2\sqrt{3}-1\right)$

2) في حالة $x=\sqrt{3}$، $S=\left(\sqrt{3}+1\right)\left(\sqrt{3}+2\sqrt{3}-1\right)=3\sqrt{3}\times\sqrt{3}-\sqrt{3}-1+3\sqrt{3}=9+2\sqrt{3}-1=8+2\sqrt{3}$

في حالة $x=\sqrt{3}+1$، $S=\left(\sqrt{3}+1+1\right)\left(\sqrt{3}+1+2\sqrt{3}-1\right)=\left(\sqrt{3}+2\right)\left(3\sqrt{3}\right)=3\sqrt{3}\times\sqrt{3}+6\sqrt{3}=9+6\sqrt{3}$

تمرين عدد 25: نعتبر S المساحة المشطوبة

1) $S=\left(a+5\sqrt{2}\right)^2-4\left(b+\sqrt{2}\right)^2$

2) $S=\left(a+5\sqrt{2}\right)^2-4\left(b+\sqrt{2}\right)^2=\left(a+5\sqrt{2}\right)^2-\left[2\left(b+\sqrt{2}\right)\right]^2=\left[\left(a+5\sqrt{2}\right)-2\left(b+\sqrt{2}\right)\right]\left[\left(a+5\sqrt{2}\right)+2\left(b+\sqrt{2}\right)\right]$

$=\left(a+5\sqrt{2}-2b-2\sqrt{2}\right)\left(a+5\sqrt{2}+2b+2\sqrt{2}\right)=\left(a-2b+3\sqrt{2}\right)\left(a+2b+7\sqrt{2}\right)$

3) في حالة $a=b=\sqrt{2}$،

$S=\left(a-2b+3\sqrt{2}\right)\left(a+2b+7\sqrt{2}\right)=\left(\sqrt{2}-2\sqrt{2}+3\sqrt{2}\right)\left(\sqrt{2}+2\sqrt{2}+7\sqrt{2}\right)=2\sqrt{2}\times10\sqrt{2}=40\ cm^2$

4) في حالة $a=\sqrt{2}+1$ و $b=\sqrt{2}-1$،

$S=\left(a-2b+3\sqrt{2}\right)\left(a+2b+7\sqrt{2}\right)=\left(\sqrt{2}+1-2\left(\sqrt{2}-1\right)+3\sqrt{2}\right)\left(\sqrt{2}+1+2\left(\sqrt{2}-1\right)+7\sqrt{2}\right)=\left(\sqrt{2}+1-2\sqrt{2}+2+3\sqrt{2}\right)\left(\sqrt{2}+1+2\sqrt{2}-2+7\sqrt{2}\right)$

$=\left(2\sqrt{2}+3\right)\left(10\sqrt{2}-1\right)=2\sqrt{2}\times10\sqrt{2}-2\sqrt{2}+3\times10\sqrt{2}-3=37-2\sqrt{2}+30\sqrt{2}=\left(37+28\sqrt{2}\right)\ cm^2$

تمرين عدد 26: نعتبر S المساحة المشطوبة

1) $S=(2x)^2-\left[4\times\frac{x^2}{2}+2\times\frac{y^2}{2}\right]=4x^2-\left(2x^2+y^2\right)=4x^2-2x^2-y^2=2x^2-y^2$

2) $S=2x^2-y^2=\left(\sqrt{2}x\right)^2-y^2=\left(\sqrt{2}x-y\right)\left(\sqrt{2}x+y\right)$

3) في حالة $x=\sqrt{3}+1$ و $y=\sqrt{3}-1$،

$S=2x^2-y^2=2\left(\sqrt{3}+1\right)^2-\left(\sqrt{3}-1\right)^2=2\left(3+2\sqrt{3}+1\right)-\left(3-2\sqrt{3}+1\right)=2\left(4+2\sqrt{3}\right)-\left(4-2\sqrt{3}\right)=8+4\sqrt{3}-4+2\sqrt{3}=\left(4+6\sqrt{3}\right)cm^2$

تمرين عدد 27: نعتبر S المساحة المشطوبة

$S=\pi\left(x+y\right)^2-\pi x^2=\pi\left(x^2+2xy+y^2\right)-\pi x^2=\pi\left(x^2+2xy+y^2-x^2\right)=\pi\left(2xy+y^2\right)=\pi y\left(2x+y\right)$

تمريـن عـ28ـدد: نعتبر S المساحة المشطوبة

$$S=\frac{\pi(3x)^2}{2}+\pi(2x)^2+2(4x\times x)=\frac{\pi}{2}\times 9x^2+\pi\times 4x^2+8x^2=\left(\frac{9\pi}{2}+4\pi+8\right)x^2=\left(\frac{9\pi}{2}+\frac{8\pi}{2}+8\right)x^2=\left(\frac{17\pi}{2}+8\right)x^2$$

في حالة $x=\sqrt{5}$ ، $S=\left(\frac{17}{2}\times\pi+8\right)\times\sqrt{5}^2=\left(\frac{17}{2}\times 3.14+8\right)\times 5=173.45\,cm^2$

في حالة $x=\sqrt{11}$ ، $S=\left(\frac{17}{2}\times\pi+8\right)\times\sqrt{11}^2=\left(\frac{17}{2}\times 3.14+8\right)\times 11=381.59\,cm^2$

تمريـن عـ29ـدد:

1) $\left(a+\frac{1}{a}\right)^2=a^2+2a\times\frac{1}{a}+\frac{1}{a^2}=a^2+\frac{1}{a^2}+2$. بما أن $a+\frac{1}{a}=\sqrt{n}$ فإن $\left(a+\frac{1}{a}\right)^2=\sqrt{n}^2=n$ لذا $a^2+\frac{1}{a^2}+2=n$

يعني $a^2+\frac{1}{a^2}=n-2$

2) $\left(b+\frac{1}{b}\right)^3=\left(b+\frac{1}{b}\right)^2\left(b+\frac{1}{b}\right)=\left(b^2+\frac{1}{b^2}+2\right)\left(b+\frac{1}{b}\right)=b^3+\frac{b^2}{b}+\frac{b}{b^2}+\frac{1}{b^3}+2b+\frac{2}{b}=b^3+\frac{1}{b^3}+b+\frac{1}{b}+2b+\frac{2}{b}$

$$=b^3+\frac{1}{b^3}+\left(b+\frac{1}{b}\right)+2\left(b+\frac{1}{b}\right)=b^3+\frac{1}{b^3}+\sqrt{m}+2\sqrt{m}=b^3+\frac{1}{b^3}+3\sqrt{m}$$

يعني $b^3+\frac{1}{b^3}=\left(b+\frac{1}{b}\right)^3-3\sqrt{m}=\sqrt{m}^3-3\sqrt{m}=m\sqrt{m}-3\sqrt{m}=\sqrt{m}(m-3)$

3) إذا كان $m=n$ فإن $\sqrt{m}=\sqrt{n}$ لذا $a+\frac{1}{a}=b+\frac{1}{b}$ يعني $a-b=\frac{1}{b}-\frac{1}{a}=\frac{a-b}{ab}$ يعني

$(a-b)-\frac{a-b}{ab}=0$ $(a-b)\left(1-\frac{1}{ab}\right)=0$ يعني $a=b$ أو $1-\frac{1}{ab}=0$ يعني $a=b$ أو $a=\frac{1}{b}$ يعني $a=b$ أو a مقلوب b

تمريـن عـ30ـدد: لدينا $x+y=3$ يعني $y=3-x$ لذا $-2x^2+3y^2=-2x^2+3(3-x)^2=-2x^2+3(9-6x+x^2)$

$$=-2x^2+27-18x+3x^2=x^2-18x+27=(x-9)^2-81+27=(x-9)^2-54$$

بما أن $(x-9)^2\geq 0$ فإن $(x-9)^2-54\geq -54$ وبالتالي $-2x^2+3y^2\geq -54$

تمريـن عـ31ـدد:

1) $\left[\sqrt{\frac{x-y}{x+y}}+\sqrt{\frac{x+y}{x-y}}\right]^2=\sqrt{\frac{x-y}{x+y}}^2+2\sqrt{\frac{x-y}{x+y}}\sqrt{\frac{x+y}{x-y}}+\sqrt{\frac{x+y}{x-y}}^2=\frac{x-y}{x+y}+2\sqrt{\frac{x-y}{x+y}}\sqrt{\frac{x+y}{x-y}}+\frac{x+y}{x-y}=\frac{x-y}{x+y}+2+\frac{x+y}{x-y}$

$$=\frac{(x-y)(x-y)}{(x+y)(x-y)}+\frac{(x+y)(x+y)}{(x-y)(x+y)}+2=\frac{(x-y)^2+(x+y)^2}{x^2-y^2}+2=\frac{(x^2-2xy+y^2)+(x^2+2xy+y^2)}{x^2-y^2}+2=\frac{x^2-2xy+y^2+x^2+2xy+y^2}{x^2-y^2}+2=$$

$$=\frac{2x^2+2y^2}{x^2-y^2}+2=\frac{2x^2+2y^2+2(x^2-y^2)}{x^2-y^2}=\frac{2x^2+2y^2+2x^2-2y^2}{x^2-y^2}=\frac{4x^2}{x^2-y^2}$$

2) لدينا $\dfrac{4x^2}{x^2-y^2} = \left[\sqrt{\dfrac{x-y}{x+y}}+\sqrt{\dfrac{x+y}{x-y}}\right]^2$ نعتبر $x=\sqrt{7}$ و $y=2$ نتحصل على

$$\left[\sqrt{\frac{x-y}{x+y}}+\sqrt{\frac{x+y}{x-y}}\right]^2 = \frac{4\left(\sqrt{7}\right)^2}{\sqrt{7}^2-2^2} = \frac{4\times7}{7-4} = \frac{28}{3}$$

تمرين عــ32ــدد: 2) لدينا $(n+1)^2 = n^2+2n+1$ لذا: $(0+1)^2 = 1^2 = 0^2+2\times0+1$ ، $(1+1)^2 = 2^2 = 1^2+2\times1+1$

$(2+1)^2 = 3^2 = 2^2+2\times2+1$ ، $(3+1)^2 = 4^2 = 3^2+2\times3+1$ ، .... ، $((n-2)+1)^2 = (n-1)^2+2(n-2)+1$ ،

$((n-1)+1)^2 = n^2 = (n-1)^2+2(n-1)+1$ ، $(n+1)^2 = n^2+2n+1$ يعني

$1^2+2^2+.......+n^2+(n+1)^2 = 1^2+2^2+.....+n^2+2(1+2+....+n)+(n+1)\times1$ يعني

$(n+1)^2 = 2(1+2+....+n)+(n+1)$ يعني $2(1+2+....n) = (n+1)^2-(n+1)$ يعني

$$1+2+.....+n = \frac{(n+1)^2-(n+1)}{2} = \frac{n(n+1)}{2}$$

(3

$$1-2^2+3^2-4^2+5^2-6^2+.....+(2009)^2-(2010)^2 = (1-2)(1+2)+(3-4)(3+4)+(5-6)(5+6)+....+(2009-2010)(2009+2010)$$
$$= (-1)(1+2)+(-1)(3+4)+(-1)(5+6)+....+(-1)(2009+2010)$$
$$= -(1+2+3+4+5+6+.....+2009+2010) = -\left(\frac{2010\times(2010+1)}{2}\right) = -\frac{2010\times2011}{2} = -2021055$$

بالاعتماد على السؤال (02) $1+2+......+n = \dfrac{n(n+1)}{2}$ ، $n=2010$)

تمرين عــ33ــدد: 1) $A^2+A-1 = \left(\dfrac{\sqrt{5}-1}{2}\right)^2+\left(\dfrac{\sqrt{5}-1}{2}\right)-1 = \dfrac{1}{4}\left(\sqrt{5}^2-2\sqrt{5}+1\right)+\dfrac{1}{2}\left(\sqrt{5}-1\right)-1$

$$= \frac{1}{4}\left(5-2\sqrt{5}+1\right)+\frac{1}{2}\sqrt{5}-\frac{1}{2}-1 = \frac{1}{4}\left(6-2\sqrt{5}\right)+\frac{1}{2}\sqrt{5}-\frac{3}{2} = \frac{3}{2}-\frac{1}{2}\sqrt{5}+\frac{1}{2}\sqrt{5}-\frac{3}{2} = 0$$

2) بما أن $A^2+A-1=0$ يعني $A^2+A=1$ يعني $A(A+1)=1$ يعني $\dfrac{1}{A} = A+1$

3) لدينا $\dfrac{1}{A} = A+1$ لذا

$$\frac{\sqrt{A}}{\sqrt{A+1}}+\frac{\sqrt{A+1}}{\sqrt{A}} = \frac{\sqrt{A}}{\sqrt{\frac{1}{A}}}+\frac{\sqrt{\frac{1}{A}}}{\sqrt{A}} = \frac{\sqrt{A}}{\frac{1}{\sqrt{A}}}+\frac{\frac{1}{\sqrt{A}}}{\sqrt{A}} = \sqrt{A}\times\sqrt{A}+\frac{1}{\sqrt{A}\times\sqrt{A}} = A+\frac{1}{A} = A+A+1 = 2A+1 = 2\left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)+1 = \sqrt{5}-1+1 = \sqrt{5}$$

تمرين عــ34ــدد: 1) $(1+n)^4 = \left((1+n)^2\right)^2 = \left(1+2n+n^2\right)^2 = (1+2n)^2+2(1+2n)n^2+\left(n^2\right)^2 = n^4+4n^3+6n^2+4n+1$

2) $14641 = 10^4+4\times10^3+6\times10^2+4\times10+1 = (1+10)^4 = 11^4 = \left(11^2\right)^2$ إذن $p = 11^2 = 121$

تمرين عــ35ــدد: $x = 10^{100}-1$ إذن $\left(10^{100}-1\right)^2 = 10^{200}-2\times10^{100}+1 = 99....9800...01$ (99 مرة العدد 9)

إذن مجموع الأرقام المكونة لـ x^2 هو 900 $(9\times99+8+1=900)$.