الجمهوريّة التّونسيّة

وزارة التّربية

كتاب الرّياضيّات

لتلاميذ السّنة الثّامنة من التّعليم الأساسي

تأليف

علي الرّحموني
متفقّد عامّ للتّربية

عبد السّلام الحبوبي
متفقّد أوّل

محمد طارق السّلطاني
متفقّد

فوزي الغربي
أستاذ أوّل

تحيين

محمد طارق السّلطاني
متفقّد أوّل

رضا السّلطاني
أستاذ أوّل

تقييم

نجيبة محمّدي
متفقّدة أولى

خليفة التّركي
متفقّد أوّل

المركز الوطني البيداغوجي

© جميع الحقوق محفوظة للمركز الوطني البيداغوجي. تونس

مقدّمة

يسرّنا أن نضع بين أيديكم هذا الكتاب آملين أن يكون مساعدا على إكساب المتعلّم المهارات التي تستهدفها برامج المادّة.

و هو يتكوّن من محاور قدّم أغلبها وفق التّمشّي التّالي:

* أستحضر : مجموعة أنشطة تساعد المتعلّم على استحضار المكتسبات الضّرورية ذات العلاقة بالمحور.

* أستكشف و أطبّق : مجموعة أنشطة تمكّن من مقاربة المفاهيم الجديدة وتركيزها.

* تمارين مرفقة بحلول : مجموعة تمارين تهدف إلى تدريب المتعلّمين على :

– اختيار تمشّيات ملائمة.

– توخّي منهجية عمل ناجعة.

– صياغة حلول.

* أحوصل : ملخّص لأهمّ المفاهيم والخاصيات والقواعد المدروسة.

* التمارين : مجموعة تمارين تساعد المتعلّم على استيعاب المفاهيم المدروسة وتوظيفها في وضعيات مألوفة أو غير مألوفة وتستنفر معارفه ومهاراته في حلّ المسائل.

أملنا أن يكون هذا الكتاب مساعدا للتلميذ في دراسته وسندا للأستاذ في عمله.

وفي الختام نشكر عضوي لجنة التقييم الّذين واكبا هذا العمل وساهما في إثرائه بملاحظاتهم القيّمة. كما نشكر كافّة أعوان المركز الوطني البيداغوجي على المجهودات الّتي بذلوها لإنجاز هذا المؤلّف.

المؤلّفون

الفهرس

أنشطة عدديّة	.1	أنشطة في الحساب. قابليّة القسمة على 8	5
	.2	مجموعة الأعداد الصّحيحة النّسبيّة	17
	.3	الجمع والطّرح والضّرب في $\mathbb{Z}$	24
	.4	الأعداد الكسريّة	50
	.5	الجمع والطّرح في مجموعة الأعدادالكسريّة	63
	.6	الضّرب والقسمة في مجموعة الأعدادالكسريّة	78
	.7	القوى في مجموعة الأعدادالكسريّة	91
أنشطة جبريّة	.8	معادلات من الدّرجة الأولى ذات مجهول واحد	107
	.9	التّناسب	119
الاحصاء والاحتمالات	.10	أنشطة حول الإحصاء والاحتمالات	139
أنشطة هندسيّة	.11	التّناظر المركزي	164
	.12	الزّوايا الحاصلة عن تقاطع مستقيم مع مستقيمين متوازيين	195
	.13	المثلّثات المتقايسة	213
	.14	رباعيّات الأضلاع	236
	.15	الهرم و المخروط والكرة	261
	.16	التّوازي في الفضاء	278

1

أنشطة في الحساب

قابلية القسمة على 8

قم للمعلّم وفّه التّبجيلا

كاد المعلّم أن يكون رسولا

أحمد شوقي

أنشطة في الحساب

قابلية القسمة على 8

استحضـــر :

1 كيف يمكن اختيار العدد a ليكون $\frac{a}{6}$ عددا صحيحا ؟

يكون العدد الصحيح الطبيعي b المخالف للصفر قاسما للعدد الصحيح الطبيعي a إذا كان a قابلا للقسمة على b أي إذا كان باقي القسمة الإقليدية للعدد a على b مساويا للصفر.
في هاته الحالة نقول أيضا أنّ a مضاعف لـ b.

2 قيس مساحة مستطيل بالصنتمتر المربّع تساوي 24. ما هي أبعاد هذا المستطيل إذا علمت أنها أعداد صحيحة طبيعية ؟

3 في كلّ حالة من الحالات التّالية عوّض الرمز(*) بما يناسب للحصول على عدد صحيح طبيعيّ

$\frac{15}{*}$; $\frac{7}{*}$; $\frac{13}{*}$; $\frac{31}{*}$

عدد أوّلي هو عدد صحيح طبيعي أكبر من 1 ولا يقبل القسمة إلا على 1 وعلى نفسه

4 1) أ- أنقل وأتمم الفراغات بما يناسب

$376 = \ldots \times 100 + 76$ ، $7275 = \ldots \times 100 + 75$ ، $546 = 5 \times 100 + \ldots$

$1700 = 170 \times \ldots + 0$ ، $750 = 151 \times 4 + \ldots$

ب- الكتابة $376 = 3 \times 100 + 76$ تمثّل القسمة الاقليديّة للعدد 376 على العدد 100.

عبّر بنفس الطريقة عن بقيّة الكتابات السّابقة.

القسمة الإقليدية للعدد الصحيح الطبيعي a على العدد الصحيح الطبيعي المخالف للصفر b تعني المساواة $a = bq + r$ حيث
q عدد صحيح طبيعي و r عدد صحيح طبيعي أصغر قطعا من b.
a يسمّى المقسوم و b يسمّى القاسم و q خارج القسمة و r باقي القسمة.

2) هل أنّ الكتابة $369 = 18 \times 19 + 27$ تمثّل قسمة إقليديّة للعدد 369 على العدد 18 ؟

3) أذكر مما يلي الأعداد الّتي تقبل القسمة على 4 :

750 ، 376 ، 546 ، 7275 ، 1700.

من منها يقبل القسمة على 25 ؟

5 1) فكّك كلّ عدد من الأعداد التّالية 56 , 95 , 225 , 490 إلى جذاء عوامل أوليّة.

2) ابحث عن ق.م.أ(56,490) وم.م.أ(95,225).

3) اختزل إلى أقصى حدّ الأعداد الكسريّة التّالية $\frac{56}{490}$ و $\frac{95}{225}$

6 أنقل الجدول التّالي واتمم تعميره

قابلية القسمة على	2	3	4	5	9	25
207	لا				نعم	
300						
330						
540						
7...	نعم	نعم	نعم	نعم	نعم	نعم

7 أ) عوّض في كلّ حالة العلامة * بالرقم المناسب لكي يكون العدد قابلا للقسمة على 4 و3 في نفس الوقت

68*7 ; 0*18 ; *345 (أعط جميع الحلول الممكنة)

ب) أوجد كلّ الأعداد المحصورة بين 600 و1200 والقابلة للقسمة على 25 و9.

8 ثمن كتاب هو 10 دنانير وثمن قلم حبر رفيع هو 15 دنانير. اشترى كتبيّ عددا من الكتب ومثل ذلك العدد أقلاما. ما هو المبلغ الذي يمثّل ثمن المشتريات من بين المبالغ التّالية :

3120 د ، 3125 د ، 3130 د ؟

9 1) أ) أذكر من بين الأعداد التّالية تلك التي تقبل القسمة على 4 :

275 ، 235348 ، 12345678 ، 2131404.

ب) ما هو باقي قسمة كلّ عدد من الأعداد السابقة على 4 ؟

2) ما هو باقي قسمة كلّ عدد من الأعداد التّالية على 25 :

275 ، 235348 ، 12345678925 ، 2131404 ، 33200 ؟

10 بدأ أحمد ومحمد وعلي في ترتيب الأعداد الصحيحة الطبيعية الأصغر من 100 في جداول مبيّنة كما يلي :

جدول أحمد

1	2	3
4	5	6
7	8	9
10	11	12
.....		

جدول محمد

1	2	3	4	5
6	7	8	9	10
11	12	13	14	15
16	17	18	19	20
.....				

جدول علي

1	2	3	4	5
10	9	8	7	6
11	12	13	14	15
20	19	18	17	16
.....				

أ) في أي عمود يوجد العدد 97 بالنسبة لكلّ جدول من الجداول الثلاثة ؟

ب) في أي عمود يوجد العدد 574 بالنسبة لكلّ جدول من الجداول الثلاثة ؟

ج) هل يوجد عمود مشترك بين جدول محمد وجدول علي ؟ حدّده وميّزه.

د) هل توجد أودية مشتركة بين جدول محمد وعلي ؟ ما ترتيب هذه الأودية ؟

استكشف واطبّق :

قابلية القسمة على 8

نشاط 1 1) ما هو باقي قسمة كلّ عدد من الأعداد التّالية على 8

16 , 94 , 157 , 647 , 808 ؟

2) ما هو باقي قسمة كلّ عدد من الأعداد التّالية على 8

112 , 2112 , 867112 , 6856835112 ؟

3) ما هو باقي قسمة كلّ عدد من الأعداد التّالية على 8

173 , 5173 , 236173 , 1567567173 ؟

نشاط 2 نعتبر الأعداد 5283 و3528 و41252 و375720.

أ) أكتب كلّ عدد من هذه الأعداد على شكل a +b حيث a عدد صحيح طبيعيّ مضاعف لـ 1000 و b عدد صحيح طبيعيّ أصغر من 1000.

ب) بالنسبة لكلّ عدد من الأعداد السّابقة قارن باقي قسمته على 8 وباقي قسمة العدد b الموافق له على 8. ماذا تستنتج ؟

لنتذكر:

يكون عدد (أكبر من 99) قابلا للقسمة على 8 إذا كان العدد المتكوّن من أرقامه الثّلاث الأخيرة (رقم الآحاد ورقم العشرات ورقم المئات) قابلا للقسمة على 8.

باقي قسمة عدد على 8 هو باقي قسمة العدد المتكوّن من أرقامه الثّلاث الأخيرة على 8.

اطبّق :

1. جد باقي قسمة كلّ عدد من الأعداد التّالية على 8 :

984 ، 67355 ، 574024 ، 9767439 ، 796864.

2. عوّض في كلّ مرّة، العلامة (*) بما يناسب لكي يصبح العدد قابلا للقسمة على 8 :

4562* ، 67453*6، 65979243*48.

3. لطفل 8 علب صغيرة تحتوي كلّ منها على كويرات بعضها أحمر وبعضها أخضر. عدد الكويرات في هذه العلب مبيّن بالجدول التّالي :

العلبة 1	العلبة 2	العلبة 3	العلبة 4	العلبة 5	العلبة 6	العلبة 7	العلبة 8
11	10	9	18	28	31	46	62

ضاعت إحدى العلب فأصبح عدد الكويرات الحمراء في السبع علب المتبقيّة مضاعفا سبع مرّات لعدد الكويرات الخضراء. ما هو عدد الكويرات الحمراء المتبقيّة ؟

تمارين مرفقة بحلّ

تمرين 1

عوّض النّقطتين بما يناسب لكي يصبح العدد $a = 12571\bullet\bullet$ قابلا للقسمة على 5 وعلى 8 .

الحلّ :

يكون العدد $a = 12571\bullet\bullet$ قابلا للقسمة على 5 إذا كان رقم آحاده 0 أو 5.

الحالة الأولى : رقم الآحاد يساوي 0 .

يقبل العدد $12571\bullet 0$ القسمة على 8 إذا كان العدد $1\bullet 0$ قابلا للقسمة على 8.

الأعداد التي تكتب 1•0 هي 100 و 110 و 120 و 130 و 140 و 150 و 160 و 170 و 180 و 190.

نلاحظ أنّ من بين هذه الأعداد 120 و160 هما فقط يقبلان القسمة على 8.

إذا العددان هما 1257120 أو 1257160.

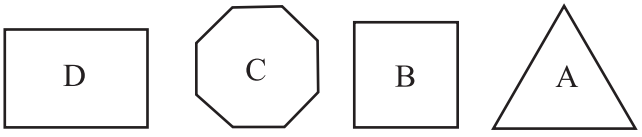
الحالة الثانية : رقم الآحاد يساوي 5.

العدد 12571•5 هو عدد فردي فلا يقبل القسمة على 2 إذن فهو لا يقبل القسمة على 8.

وبالتّالي فإنّ 1257120 و1257160 هما العددان الوحيدان اللّذان يستجيبان للشرطين.

تمرين 2

أقيسة أضلاع الأشكال المقابلة هي أعداد صحيحة طبيعية.



ما هو قيس محيط كلّ شكل من الأشكال التالية

إذا علمت أنّه عدد صحيح طبيعيّ ينتمي إلى المجموعة

{292 , 715 , 120 , 279 , 274} وأنّ الأشكال مساحاتها مختلفة.

ملاحظة : لم يقع اعتماد نفس السلّم في رسم هذه الأشكال.

الحلّ :

- محيط المثلّث A هو عدد قابل للقسمة على 3 إذا فهو 120 أو 279 .
- محيط المربّع B هو عدد قابل للقسمة على 4 إذا فهو 120 أو 292 .
- محيط الشّكل C هو عدد قابل للقسمة على 8 إذا فهو 120 (العدد الوحيد القابل للقسمة على 8).
- محيط الشّكل D هو عدد قابل للقسمة على 2 إذا فهو 120 أو 292 أو 274.

أحوصـــل

- القسمة الإقليدية للعدد الصحيح الطبيعي a على العدد الصحيح الطبيعي المخالف للصفر b تعني كتابة a على شكل $a=bq+r$ حيث q عدد صحيح طبيعي و r عدد صحيح طبيعي أصغر قطعا من b.

- a يسمّى المقسوم و b يسمّى القاسم و q خارج القسمة و r باقي القسمة .

- يكون العدد الصحيح الطبيعي b المخالف للصفر قاسما للعدد الصحيح الطبيعي a إذا كان a قابلا للقسمة على b أي إذا كان باقي القسمة الإقليدية للعدد a على b يساوي صفرا.

- عدد أوّلي هو عدد صحيح طبيعي أكبر من 1 ولا يقبل القسمة إلا على 1 وعلى نفسه.

- يكون عدد (أكبر من 99) قابلا للقسمة على 8 إذا كان العدد المتكوّن من أرقامه الثّلاث الأخيرة (رقم الآحاد ورقم العشرات ورقم المئات) قابلا للقسمة على 8.

- باقي قسمة عدد على 8 هو باقي قسمة العدد المتكوّن من أرقامه الثلاث الأخيرة على 8

تمـــارين

1 1) أذكر باقي قسمة كلّ عدد من الأعداد التّالية على 8 :

1832 , 8518 , 45361 , 11740 , 82153.

2) عوّض في كلّ مرّة ، النقطة بما يناسب لكي يصبح العدد قابلا للقسمة على 8

5562• , 673•6 , 245•44

2 أجب بصحيح أو خطأ

أ) كلّ عدد يقبل القسمة على 4 يقبل القسمة على 8.

ب) كلّ عدد يقبل القسمة على 12 يقبل القسمة على 8.

ت) كلّ عدد يقبل القسمة على 8 يقبل القسمة على 4.

ث) كلّ عدد يقبل القسمة على 120 يقبل القسمة على 9.

ج) كلّ عدد يقبل القسمة على 16 يقبل القسمة على 8.

3 1) ابحث عن أصغر عدد صحيح طبيعي ذي رقمين :

أ) يقبل القسمة على 3 و8 في نفس الوقت.

ب) يقبل القسمة على 5 و8 في نفس الوقت.

2) ابحث عن أصغر عدد صحيح طبيعيّ مخالف للصفر ويقبل القسمة على 3 و8 و5 في نفس الوقت.

4 حدّد، في كلّ مرّة، الأعداد الصحيحة الطبيعيّة الأكبر من 600 والأصغر من 1800 والّتي تقبل القسمة على :

أ) 8 و9 ، ب) 8 و5 و3 ، ج) 8 و5 و9 ، د) 8 و25 ، هـ) 8 و25 و3 ، و) 8 و25 و9

5 ضع رقما مكان كلّ نقطة لكي يصبح العدد قابلا للقسمة على 8 و5 و9

. . 8 6، . 4 . 5، 0 . . 7 (أعط جميع الحلول الممكنة)

6 حدّد بواسطة الآلة الحاسبة خارج وباقي القسمة الإقليدية لـ

أ) 267 على 15 ب) 5532 على 235 ج) 33555 على 824

7 سأل رجل علي إبن أبي طالب "ما هو أصغر عدد مضاعف في نفس الوقت لـ 2 و3 و4 و5 و6 و7 و8 و9 و10" فأجابه " أضرب عدد أيّام الأسبوع في عدد أيّام الشهر في عدد أشهر السّنة فستجد ما تبتغي".

تحقّق من مدى صحّة هذه الإجابة.

8 قطعة أرض مستطيلة الشكل مساحتها بالمتر المربّع 900 ومحيطها بالمتر 122 .

ما هما بعداها إذا علمت أنّهما عددان صحيحان طبيعيّان.

9 بيّن أنّ :

أ) $3^{2012} - 3^{2010}$ هو عدد قابل للقسمة على 8 .

ب) $2^{75} + 2^{74} + 2^{73}$ قابل للقسمة على 7 .

10 دون إجراء عمليّة القسمة، أذكر من بين الأعداد التالية الّتي لها نفس باقي القسمة على 8

8112 ، 623 ، 51228 ، 11623 ، 81076 ، 923600 ، 75368974623.

11 ثمن كتاب هو 3 دنانير وثمن قلم حبر رفيع هو 5 دنانير

اشترى كتبي نفس العدد من هذه الكتب والأقلام ودفع مقابل ذلك 1296 دينارا. ما هو عدد الكتب المشتراة ؟

12 اختزل إلى أقصى حدّ الأعداد الكسريّة التّالية :

$\frac{255}{595}$ ، $\frac{588}{840}$ ، $\frac{3600}{5400}$ ، $\frac{36650}{51975}$

13 1) نعتبر الأعداد التّالية : 5454، 2323، 6767، 3838، 1919

ما هو خارج قسمة كلّ واحد منها على 101 ؟

2) أكتب عددا ذو رقمين واكتب بجانبه نفس ذاك العدد تتحصّل بذلك على عدد ذو أربعة أرقام.

ما هو خارج قسمته على 101 ؟ ماذا تلاحظ ؟ فسّر ذلك.

14 1) نعتبر الأعداد التّالية :

512512 ، 103103 ، 351351 ، 748748

ما هو خارج قسمة كلّ منها على 7 و11 و13 و1001.

2) أكتب عددا ذو ثلاثة أرقام واكتب بجانبه ذاك العدد نفسه.تتحصّل على عدد ذي ستّة أرقام.

ما هو خارج قسمته على 1001 ؟ ماذا تلاحظ ؟ فسّر ذلك.

15 أ) ضع رقما مكان كلّ نقطة لكي يصبح العدد قابلا للقسمة على 8 و3

. 8 . 6، . 5 . 4، . . 73 (أعط جميع الحلول الممكنة)

ب) ضع رقما مكان كل نقطة لكي يصبح العدد قابلا للقسمة على 9 و 8

. 8 . 6 ، . 5 . 4، . . 73 (أعط جميع الحلول الممكنة)

ضع رقما مكان كلّ نقطة لكي يصبح العدد قابلا للقسمة على 8 و 9 و 25

. . 8 . 6، . . 5 . 4 ، . . . 73 (أعط جميع الحلول الممكنة)

16 نعتبر العدد a=12345679

باستعمال الآلة الحاسبة أحسب 18a، 27a، 54a .

ماذا تلاحظ ؟ هل بإمكانك تعميم النتيجة وتفسيرها ؟

17 ضع رقما مكان كلّ نقطة لكي يصبح العدد قابلا للقسمة في نفس الوقت على 8 و9:

. . 8 0 ، . . 5 0 ، . . 7 0 (أعط جميع الحلول الممكنة).

مجموعة الأعداد الصّحيحة النسبيّة

I مجموعة الأعداد الصّحيحة النّسبيّة

II تدريج مستقيم بواسطة الأعداد الصحيحة النسبية

III القيمة المطلقة لعدد صحيح نسبيّ

مجموعة الأعداد الصّحيحة النسبيّة

أستحضـــر :

1 جد العدد الصحيح الطّبيعي x إن أمكن ذلك في كلّ حالة من الحالات التّالية :

أ) $x+2=2$ ب) $x-2=0$ ج) $x+3=10$ د) $5+x=2$

2 عبّر بعدد صحيح نسبيّ عن تاريخ كلّ حدث من الأحداث التّالية :

- تولّى حنّبعل قيادة الجيش القرطاجي سنة 221 ق م.
- بدأت الحروب البونيّة بين قرطاج وروما سنة 264 ق م.

أستكشف وأطبّق :

I. مجموعة الأعداد الصّحيحة النّسبيّة

نشاط 1 سجّل مركز الرصد الجويّ بمدينة تالة خلال أسبوع من شهر جانفي درجات الحرارة المدرجة في الجدول أسفله

الأحد	الاثنين	الثلاثاء	الأربعاء	الخميس	الجمعة	السبت
5 فوق الصفر	2 فوق الصفر	1 تحت الصفر	0	3 تحت الصفر	2 تحت الصّفر	3 فوق الصفر

إنّ درجة الحرارة المسجّلة ليوم الأحد هي 5 درجات فوق الصفر فنقول إنّ درجة الحرارة هي زائد خمسة ونكتب (+5) أو 5+. كما أنّ درجة الحرارة المسجّلة ليوم الثلاثاء هي درجة واحدة تحت الصفر فنقول إنّ درجة الحرارة هي ناقص واحد ونكتب (-1) أو 1-.

1) عبّر شفويّا عن بقيّة درجات الحرارة في الجدول السّابق.

تحصّلنا في هذا النّشاط على أعداد تكتب على الشكل 5+ ; 2+ ; 1- ; 0 ; 3-.

نسمّي كلّ عدد من هذه الأعداد عددا صحيحا نسبيّا.

نرمز لمجموعة الأعداد الصّحيحة النسبيّة بـ $\mathbb{Z}$.

$$\mathbb{Z}=\{0;+1;-1;+2;-2;+3;-3;+4;-4;...\}$$

$\mathbb{N}=\{0;1;2;3;4;...\}$ مجموعة الأعداد الصّحيحة الطبيعيّة.

$\mathbb{Z}=\{0;1;-1;2;-2;3;-3;...\}$ مجموعة الأعداد الصّحيحة النسبيّة.

نسمّي كلّ عدد من الأعداد 8+ ; 75+ ; 127+ ; 3+ عددا صحيحا نسبيّا موجبا.

ونسمّي كلّ عدد من الأعداد 7- ; 12- ; 13- ; 1- عددا صحيحا نسبيّا سالبا.

نرمز إلى مجموعة الأعداد الصحيحة النسبيّة الموجبة بـ $\mathbb{Z}_+$ ونقرأ ''زاد زائد''.

نرمز إلى مجموعة الأعداد الصحيحة النسبيّة السالبة بـ $\mathbb{Z}_-$ ونقرأ ''زاد ناقص''.

$\mathbb{Z}_+ = \{0;+1;+2;+3;+4;...\}$ و $\mathbb{Z}_- = \{0;-1;-2;-3;-4;...\}$

2) حدّد المجموعتين $\mathbb{Z}_+ \cap \mathbb{Z}_-$ و $\mathbb{Z}_+ \cup \mathbb{Z}_-$

لنتذكر:

نطابق بين كلّ عدد صحيح طبيعيّ n والعدد الصحيح النّسبيّ +n وهكذا يمكننا أن نكتب $\mathbb{Z}_+ = \mathbb{N}$.

أطبق :

نعتبر المجموعات التّالية :

$A=\{0,-1,2,-3,4,-4\}$; $B=\{-1,-3,-4\}$; $C=\{0,-1,-2,4\}$

أتمم بأحد الرموز التّالية : $\in$ أو $\notin$ أو $\subset$ أو $\not\subset$

$\{0\} ... \mathbb{Z}_-$ ، $\{-1,0\} ... \mathbb{Z}_-$ ، $13 ... \mathbb{Z}$ ، $-5 ... \mathbb{Z}$ ، $0 ... \mathbb{Z}_-$ ، $B ... A$ ، $C ... A$ ،

$\{1,0,3\} ... \mathbb{Z}_+$ ، $-6 ... \mathbb{Z}_-$ ، $\{-3,-2,1,-1,0\} ... \mathbb{Z}_-$

-2 ; 7 ; 0 ; +3 ; -3 هي أعداد عشرية نسبيّة وتسمّى أيضا أعدادا صحيحة نسبيّة.

II. تدريج مستقيم بواسطة الأعداد الصحيحة النسبية

نشاط 1 يمثّل الرّسم التّالي مستقيما مدرّجا (x'x).

أ) ما هي فاصلة كلّ من النّقاط O وI وA وB وC.

ب) ما هي النّقاط التي تمثّل الأعداد التّالية 4- و2+ و3+ و5- ؟

ج) مثّل على المستقيم (x'x) الأعداد : 1- و5+ و6-.

د) ضع النّقطة M ذات الفاصلة 7-.

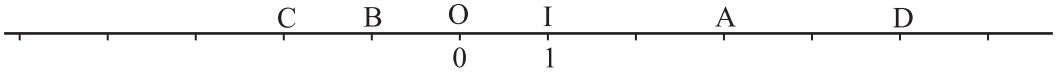
أمكن لنا أن نمثّل كلّ عدد صحيح نسبيّ بنقطة واحدة من المستقيم (x'x) فنقول إنّنا درّجنا المستقيم (x'x) بواسطة الأعداد الصّحيحة النسبيّة.

لتدريج مستقيم : نختار نقطتين مختلفتين منه تمثّلان على التوالي العددين 0 و1.

- النّقطة O الممثّلة للعدد 0 تسمّى أصل التّدريج.
- النّقطة I التي تمثّل العدد 1 تسمّى النّقطة الواحديّة .
- أما طول القطعة [OI] فيسمّى وحدة التّدريج.

اطبق :

1 1) أنقل الشكل التّالي على كرّاسك :

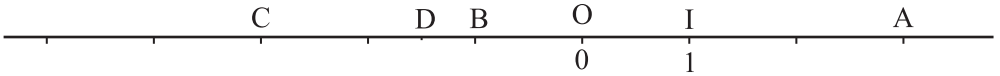


2) ما هي فاصلة كلّ من النّقاط A وB وC وD ؟

3) ارسم النّقطة M منتصف قطعة المستقيم [IA] وأعط فاصلتها.

4) عيّن النّقطة N ذات الفاصلة 4-.

2 نعتبر المستقيم المدرّج بالمعيّن (O, I) حيث OI=1cm.



1) حدّد فاصلة كلّ من النّقاط A وB وC وD في المعيّن (O,I).

2) عيّن النّقطة E منتصف [CB] ثم جد فاصلتها.

3) عيّن النّقطتين F وG فاصلتيهما على التّوالي 5- و4-.

3 أرسم مستقيما (xy) مدرّجا بالمعيّن (O, I) حيث OI=1cm. ($I \in [Ox)$).

ما هي العبارات الصّحيحة من بين العبارات التّالية :

– النّقاط التي فاصلتها أعداد صحيحة موجبة تنتمي إلى نصف المستقيم [Ox).

– النّقاط الّتي فاصلتها أعداد صحيحة موجبة تنتمي إلى قطعة المستقيم[OI].

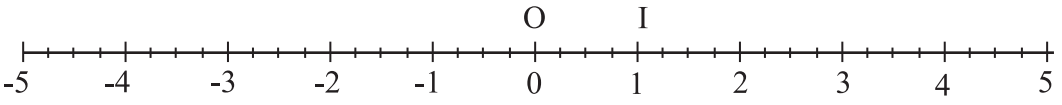
– النّقاط الّتي فاصلتها أعداد صحيحة سالبة تنتمي إلى نصف المستقيم (Ox'].

– النّقاط الّتي فاصلتها أعداد صحيحة سالبة تنتمي إلى نصف المستقيم (Ix'].

4 أرسم مستقيما مدرّجا Δ وضع عليه نقطتين E وF بحيث تكون فاصلتاهما على التّوالي 3- و2-.

III. القيمة المطلقة لعدد صحيح نسبيّ

نشاط 1 نعتبر المستقيم المدرّج التّالي حيث OI=1.



1) أ) أنقل الرسم وعيّن النّقطة A الّتي فاصلتها 4 ثمّ عيّن 'A مناظرتها بالنسبة للنّقطة O أصل التّدريج. ما هي فاصلة 'A ؟

ب) ما هو البعد OA ؟ ما هو البعد 'OA ؟

2) أ) أرسم النّقطتين C وD اللّتين فاصلتاهما على التّوالي 3- و2.

ب) أرسم 'C و'D مناظرتي C وD بالنسبة للنقطة O.ما هي فاصلة 'C ؟ ما هي فاصلة 'D؟

ج) قارن OC و'OC ثمّ OD و'OD.

3) أ) لتكن M نقطة من المستقيم المدرّج بعدها 5 عن النقطة O. ما هي فاصلتها ؟ أرسم M.

ب) لتكن N نقطة من المستقيم المدرّج فاصلتها عدد صحيح نسبيّ a. ما هو بعدها عن النقطة O ؟

ليكن a عددا صحيحا نسبيّا وM نقطة فاصلتها a على مستقيم مدرّج بالمعيّن (O,I) حيث OI=1.

القيمة المطلقة للعدد الصحيح النسبيّ a هي البعد OM ونرمز لها بـ |a|.

أطبق :

أحسب

$|9|$; $|7|$; $|-11|$; $|8|$; $|-8|$; $|0|$; $|11|$; $|-7|$

نشاط 2 1) أ) أحسب القيم المطلقة التّالية $|9|$; $|-13|$; $|5|$; $|-9|$; $|13|$; $|-5|$.

ب) قارن العددين في كلّ حالة من الحالات التّالية : $|9|$ و $|-9|$; $|-5|$ و $|5|$; $|-13|$ و $|13|$.

2) إذا كان a عددا صحيحا نسبيّا, أثبت أنّ : ($|a|=0$ يعني $a=0$).

أطبق :

جد العدد a إن أمكن ذلك في كلّ حالة من الحالات التّالية : $|a|=5$; $|a|=-6$; $|a|=2$; $|a|=0$

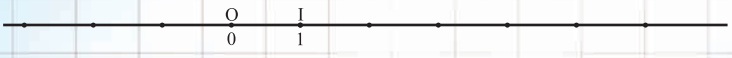
أحوصـــل

$\mathbb{N}=\{0;1;2;3;4;...\}$ مجموعة الأعداد الصّحيحة الطبيعيّة.

$\mathbb{Z}=\{0;1;-1;2;-2;3;-3;...\}$ مجموعة الأعداد الصّحيحة النسبيّة.

لتدريج مستقيم : نختار نقطتين مختلفتين منه تمثّلان على التوالي العددين 0 و1.

- النّقطة O الممثّلة للعدد 0 تسمّى أصل التّدريج.
- النّقطة I التي تمثّل العدد 1 تسمّى النّقطة الواحديّة.
- أمّا طول القطعة [OI] فيسمّى وحدة التّدريج.



ليكن a عددا صحيحا نسبيّا وM نقطة فاصلتها a على مستقيم مدرّج بالمعيّن (O,I) حيث OI=1.

القيمة المطلقة للعدد الصحيح النسبيّ a هي البعد OM ونرمز لها بـ $|a|$.

إذا كان n عددا صحيحا طبيعيّا فإنّ $|n|=|-n|=n$.

تمـــارين

1 استعمل الأعداد الصّحيحة النسبيّة للتّعبير عن الارتفاع أو العمق بالمتر في الجدول التّالي :

المكان	الارتفاع أو العمق بالمتر
جبل الشّعانبي	1544 فوق سطح البحر
حفرة البحر الميّت	400 تحت سطح الأرض
إفريست (سلسلة الهمالايا بآسيا)	8848 فوق سطح البحر
حفرة الرّأس الأخضر	6290 تحت سطح الأرض
جبل طوبقال (سلسلة جبال الأطلس بإفريقيا)	4165 فوق سطح البحر
حفرة مندانو	10700 تحت سطح الأرض

2 أذكر الأعداد الصّحيحة النسبيّة من بين الأعداد التّالية :

46 و203- و $\frac{35}{7}$ و $\frac{15}{2}$ و14- و17+ و0.

3 اشطب الخطأ واترك الصحيح :

$6\in\mathbb{N}$ ، $3{,}2\in\mathbb{N}$ ، $\frac{15}{3}\in\mathbb{N}$ ، $0\in\mathbb{N}$ ، $\sqrt{16}\in\mathbb{N}$ ، $\{-1;2;0\}\subset\mathbb{N}$ ،

$\{21;(-2);0\}\not\subset\mathbb{N}$ ، $\{21;|-2|;0\}\not\subset\mathbb{N}$ ، $3{,}2\in\mathbb{Z}$ ، $\frac{15}{3}\in\mathbb{Z}$ ، $-\sqrt{9}\in\mathbb{Z}$ ،

$\{-1;2;0\}\subset\mathbb{Z}$ ، $\sqrt{196}\in\mathbb{Z}_-$ ، $\mathbb{Z}_-\subset\mathbb{Z}$ ، $\{-1;-2;0\}\subset\mathbb{Z}_-$ ، $\{-121;(-7);0\}\not\subset\mathbb{Z}_+$ ،

$\{221;|-12|;0\}\not\subset\mathbb{Z}_+$.

4 استخرج الأعداد الصّحيحة النسبيّة الموجبة من بين الأعداد التّالية :

206 ، (-9) ، 0 ، (-8) ، $|-4|$

5 أ) جد القيمة المطلقة لكلّ عدد من الأعداد التّالية :

-4531 ، 517 ، $|-42|$ ، $-|-5|$

6 أ) حدّد عناصر المجموعات التّالية :

E هي مجموعة الأعداد الصّحيحة النّسبيّة x بحيث : $|x|=5$

F هي مجموعة الأعداد الصّحيحة النّسبيّة الموجبة x بحيث : $|x|=5$

G هي مجموعة الأعداد الصّحيحة النّسبيّة السّالبة x بحيث : $|x|=5$

ب) قارن المجموعتين E و $F\cup G$.

7 لنفرض المجموعة التّالية :

$E=\{0\ ,\ 1\ ,\ -1\ ,\ 2\ ,\ -2\ ,\ -3\ ,\ 4\ ,\ 5\ ,\ -5\ ;\ 6\}$.

لنعتبر A مجموعة الأعداد الموجبة والمنتمية إلى المجموعة E

و B مجموعة الأعداد السّالبة والمنتمية إلى المجموعة E.

أ) حدّد عناصر كلّ من المجموعتين A و B.

ب) حدّد عناصر كلّ من المجموعات التّالية :

C هي مجموعة الأعداد المنتمية إلى E وقيمتها المطلقة تساوي 3.

D هي مجموعة x الأعداد المنتمية إلى E حيث $|x|=5$

F هي مجموعة x الأعداد المنتمية إلى E حيث $|x|=9$

G هي مجموعة x الأعداد المنتمية إلى E حيث $|x|<4$

8 حدّد المجموعتين :

E مجموعة الأعداد الصّحيحة النّسبيّة الّتي تتساوى مع قيمتها المطلقة.

F مجموعة الأعداد الصّحيحة النّسبيّة x حيث $|x|=3$.

9 جد، إن أمكن ذلك، في كلّ وضعيّة من الوضعيّات التّالية الأعداد الصّحيحة النّسبيّة x :

$|x|=125$ ، $|x|=-17$ ، $|x|=0$ ، $|x|=1$ ، $|x|=|-8|$

الجمع والطرح والضرب في مجموعة الأعداد الصحيحة النسبيّة

I الجمع في مجموعة الأعداد الصحيحة النسبيّة

II الطرح في مجموعة الأعداد الصحيحة النسبيّة

III مقارنة الأعداد الصّحيحة النّسبيّة

IV الضرب في مجموعة الأعداد الصحيحة النسبيّة

الجمع والطرح والضرب في مجموعة الأعداد الصحيحة النسبيّة

أستحضـــر :

1. احسب ذهنيّا : 13×12 ; 214×5 ; $196-116$; $127+113$

2. احسب : $13\times10-8$; $26\times34-26\times24$; $17\times6+17\times24$; $2+5\times3$

أستكشف وأطبّق :

I. الجمع في مجموعة الأعداد الصحيحة النسبيّة

1. مفهوم الجمع في $\mathbb{Z}$

نشاط 1 الجدول التّالي به درجات الحرارة المسجّلة على السّاعة السّادسة والثّامنة صباحا في يوم من أيّام الشّتاء لثلاث مدن تونسيّة.

أ) أنقل الجدول التالي وأكمله

المدينة	درجة الحرارة على السّاعة السّادسة صباحا	في حدود السّاعة الثّامنة ارتفعت درجة الحرارة بـ	درجة الحرارة على السّاعة الثّامنة صباحا
تالة	-7	2	
عين دراهم	-6	3	
مكثر	-5		-2

ب) العمليّة الموافقة لحساب درجة الحرارة لمدينة تالة على السّاعة الثّامنة صباحا لذلك اليوم هي : $(-5)=(+2)+(-7)$.

أنجز العمليّة التي تحدّد درجة الحرارة على السّاعة الثّامنة صباحا لنفس اليوم لكلّ من مدينتي عين دراهم ومكثر.

نشاط 2 لعب طفل مع أقرانه لعبة الكجّات وسجّلت نتائجه في الجدول التّالي

	حاصل الصّباح	حاصل المساء	الحاصل اليومي
اليوم الأوّل	ربح 8 كجّات	ربح 12 كجّة	
اليوم الثاني	ربح 3 كجّات	خسر 5 كجّات	
اليوم الثالث	خسر 11 كجّة	ربح 4 كجّات	
اليوم الرّابع	خسر 7 كجّات	خسر 6 كجّات	

أ) أنقل الجدول على كرّاسك مستعملا الأعداد الصّحيحة النسبيّة ثمّ أكمله

ب) نعتبر الجدول المقابل

	العمليّة الموافقة للحاصل اليومي
اليوم الأوّل	(+8)+(+12)=(+20)
اليوم الثاني	(+3)+(-5)=(-2)
اليوم الثالث	
اليوم الرّابع	

أنقل الجدول على كرّاسك ثمّ أتممه.

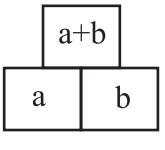
- مجموع عددين صحيحين نسبيين لهما نفس العلامة هو عدد صحيح نسبيّ قيمته المطلقة هي مجموع القيمتين المطلقتين للعددين وعلامته هي علامة العددين.
- مجموع عددين صحيحين نسبيين مختلفي العلامة هو عدد صحيح نسبيّ قيمته المطلقة هي الفرق بين أكبر وأصغر قيمة مطلقة للعددين وعلامته هي علامة العدد الّذي له أكبر قيمة مطلقة.

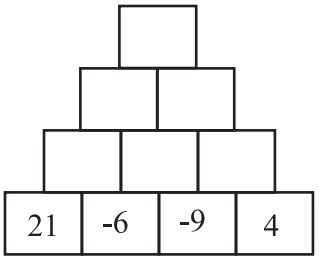
اطبّق :

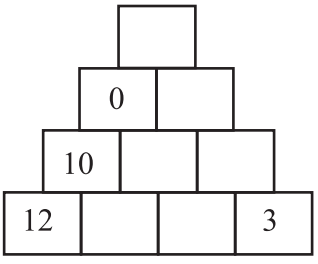
1 أ) أحسب : $(-47)+(-35)$ ، $(-27)+(+18)$ ، $(+7)+(+4)$ ، $(-13)+(+15)$.

2 أحسب : $(-9)+(-7)$، $(-28)+15$، $5+(-9)$، $38+65$، $8+(-8)$، $15+(-13)$.

3 اتمم الهرمين التّاليين حيث







4 أحسب ما يلي

(-24)+13 ; (-14)+20 ; (-18)+(-25) ; 0+(-8) ; 14+(-14).

* لحساب (+17)+(-28) بالآلة الحاسبة نضغط على الأزرار التّالية كما يلي (من اليسار إلى اليمين) أي بداية من 2 :

2	8	+/-	+	1	7	=

فتظهر لنا النّتيجة 11- على الشّاشة

2. خاصيّات عمليّة الجمع

نشاط 1 احسب وقارن المجاميع التّالية :

أ) 3+(-2) و(-2)+3 ، ب) 5+[(-4) + (-2)] و [5+(-4)]+(-2).

مهما يكن العددان الصّحيحان النسبيّان a و b فإنّ : a+b=b+a ونقول أنّ الجمع في $\mathbb{Z}$ هي عمليّة تبديليّة

مهما يكن a و b و c أعدادا صحيحة نسبيّة فإنّ : (a+b)+c=a+(b+c) ونقول أنّ الجمع في $\mathbb{Z}$ هي عمليّة تجميعيّة

أي كما في $\mathbb{N}$ الجمع في $\mathbb{Z}$ هي عمليّة تبديليّة وتجميعيّة.

اطبق :

1 استعمل الخاصيّة السابقة لتبرهن على أنّ : $(-14)+(-15)=(-19)+(-10)$

و $40+70=25+85$

2 ولد حنبعل سنة 247 قبل الميلاد (نكتب ذلك "ولد سنة 247 —"). عندما بلغ عمره 26 سنة تم تكليفه بقيادة الجيش القرطاجي. من أشهر حيله العسكريّة تلك المعروفة بـ "كمين الثيران" وهو الكمين الذي نصبه للقائد "فابيوس" بعد أربع سنوات من تولّيه قيادة الجيش وتمكّن بفضله من فتح الطريق أمام جيشه. توفي حنبعل وعمره 64 سنة.

في أي سنة كلّف حنبعل بقيادة الجيش ؟ في أيّ سنة نصب "كمين الثيران" للقائد فابيوس وفي أيّ

3 سنة توفّي ؟

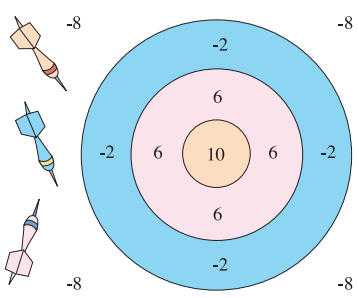
يرمي 5 أطفال كلّ منهم سهما 3 مرّات على هدف (كما في الرسم المقابل)

(نسند (-8) إن سقط السهم خارج الهدف).

في نهاية اللّعبة كانت الحصيلة كالأتي :

فؤاد : 14، رؤوف : 0، صابر : 8، لمياء : 24-، مريم : 4-.

فسّر كيف تحصّل الأطفال على تلك النتائج.



نشاط 2 جد عددا صحيحا نسبيّا يمكن أن يعوّض x في كلّ حالة من الحالات التّالية :

$-249+x=-249$ ، $x+0=24$ ، $0+x=-3+(-8)$ ، $0+x=0$ ،

$(-6+x)+0=-6$

مهما يكن العدد الصّحيح النّسبيّ a فإنّ : $a+0=0+a=a$. أي كما في $\mathbb{N}$ الصّفر هو عنصر محايد لعمليّة الجمع في $\mathbb{Z}$

3. مقابل عدد صحيح نسبيّ

نشاط 1 ليكن Δ مستقيما مدرّجا بالمعّين (O,I).

أ) نعتبر النقطتين E وF من المستقيم Δ فاصلتاهما على التوالي 3+ و3-. ماذا تمثّل النّقطة O بالنسبة إلى القطعة [EF] ؟

ب) ليكن n عددا صحيحا طبيعيّا ولتكن M وN نقطتين من المستقيم Δ حيث فاصلتاهما n و-n على التوالي. ماذا تمثّل النّقطة O بالنسبة إلى القطعة [MN] ؟

نشاط 2 ليكن Δ مستقيما مدرّجا بالمعّين (O,I)

1) ليكن a عددا صحيحا طبيعيّا وA نقطة من المستقيم Δ حيث فاصلتها a. نعتبر النقطة B مناظرة النقطة A بالنسبة إلى النّقطة O.

أ) حدّد العدد الصحيح النسبي b فاصلة النقطة B ؟

نقول أنّ b هو مقابل a

ب) احسب a+b

2) ليكن c عددا صحيحا طبيعيّا و C نقطة من المستقيم Δ حيث فاصلتها c-. نعتبر النقطة D مناظرة النقطة C بالنسبة إلى النّقطة O

أ) حدّد العدد الصحيح النسبي d فاصلة النقطة D ؟

ب) احسب c+d

نقول أن d هو مقابل c

ملاحظة :

إذا كان n عددا صحيحا طبيعيّا فإن مقابل n هو العدد n- ومقابل n- هو العدد n

ليكن a عددا صحيحا نسبيّا :

مقابل العدد a هو العدد الصّحيح النّسبيّ الوحيد b حيث : $(a+b=0)$ ونرمز له بـ $-a$

أطبق :

1 ليكن Δ مستقيما مدرّجا بالمعّين (O,I)

أ) نعتبر نقطتين A و B من المستقيم Δ حيث فاصلتاهما عددان صحيحان نسبيّان متقابلان. ماهو منتصف القطعة [AB] ؟

ب) نعتبر نقطتين E و F من المستقيم Δ متناظرتين بالنسبة لـ O. كيف هما فاصلتاهما ؟

2 أ) جد مقابل كلّ عدد من الأعداد التّالية: 3- ; 2+ ; 0 ; 5- ; 1,2- ; 3,14 .

ب) كم يوجد من عدد صحيح نسبيّ مساو لمقابله ؟.

ج) هل يوجد عدد صحيح نسبيّ ليس له مقابل ؟.

الآلة الحاسبة

9- = ثمّ +/- ثمّ 9

3 جد العدد الصحيح النّسبيّ x في كلّ حالة من الحالات التّالية :

$18+x=0$ ، $-43+x=0$ ، $x+32=0$ ، $x+(-301)=0$

مهما يكن العدد الصحيح النسبي a فإنّ $|-a|=|a|$

كلّ عددين صحيحين نسبيّين متقابلين لهما نفس القيمة المطلقة

نشاط 3 أ) أحسب $S=a+b$ حيث $a=-7$ و $b=13$.

ب) جد مقابل العدد a ومقابل العدد b وأحسب مجموعهما 'S.

ج) أحسب $S+S'$. ماذا تلاحظ ؟

د) اختر أعدادا أخرى a و b وتحقّق من النّتيجة التّالية : مقابل مجموع عددين صحيحين نسبيّين هو مجموع مقابلي هذين العددين.

مقابل مجموع عددين صحيحين نسبيّين هو مجموع مقابلي هاذين العددين.

أطبق :

1 a وb عددان صحيحان نسبيّان. جد مقابل $(a+b)$ في كلّ حالة من الحالات التّالية :

$a+b+5=0$ ، $a+(-9)+b=0$ ، $(1+b)+(-1+a)=0$ ، $-2=a+b$

4. حساب مجموع عدّة أعداد صحيحة نسبيّة

نشاط 4 نعتبر المجموع : $S=(-17)+26+(-53)+(-26)+17+(-8)$

1) أ) أحسب $S_1=(-17)+(-53)+(-26)+(-8)$ و $S_2=26+17$ و S_1+S_2.

قارن S_1+S_2 و S.

ب) فسّر لماذا $S=[(-17)+17]+[26+(-26)]+(-53)+(-8)$ ؟

2) لاحظ الحساب التّالي وأشرح مراحله :

$$\begin{aligned} A &= 85+(-18)+43 \\ &= 85+[(-3)+(-15)]+[40+3] \\ &= 85+[(-3)+3]+[(-15)+40] \\ &= 85+25 \\ &= 110 \end{aligned}$$

لا يتغيّر مجموع عدّة أعداد صحيحة نسبيّة :

- بتغيير ترتيب حدوده
- بتعويض بعض من حدوده بمجموعها.
- بتعويض أحد حدوده بمجموع يساويه.

أطبق :

1 نعتبر المجموع التّالي : $A=135+(-314)+(-27)+(-135)+14+27$. أحسب المجموع بأيسر طريقة تختارها.

2 أحسب : $14+(-2)+(-14)$; $-8+10+(-3)$; $-1+(-5)+(-15)$; $-4+(-1)+5+(-9)$

II- الطرح في مجموعة الأعداد الصحيحة النسبيّة

1. مفهوم الطرح في $\mathbb{Z}$

نشاط 1 أكمل بما يناسب

$(+11)=(\ldots)+(+8)$ وبالتّالي $(+8)=(+11)+(\ldots)$

$(-4)=(\ldots)+(+5)$ وبالتّالي $(+5)=(-4)+(\ldots)$

$(-7)=(\ldots)+(-2)$ وبالتّالي $(-2)=(-7)+(\ldots)$

ليكن a و b و c ثلاثة أعداد صحيحة نسبيّة

فإنّ $a+b=c$ يعني $a=c+(-b)$ و نكتب $a-b=a+(-b)$

ولد يوغرطة سنة 160- (أي 160 سنة قبل الميلاد). من أشهر المعارك التي خاضها معركة "سوتيل" التي دارت سنة 110- وانتصر فيها على القائد الروماني "أوليس". توفي سنة 104- في أحد سجون روما إثر أسره.

1) كم كان عمره عندما خاض معركة "سوتيل" ؟

2) كم من سنة عاش يوغرطة ؟

نشاط 2 يبيّن الجدول التّالي درجات الحرارة المسجّلة كلّ ساعة بمدينة تالة في أحد أيّام شهر ديسمبر من السّاعة الخامسة صباحا إلى منتصف النّهار.

السّاعة	5	6	7	8	9	10	11	12
درجة الحرارة	-7	-4	-2	0	3	5	7	11

ما هو مقدار ارتفاع درجة الحرارة

أ) بين السّاعة التّاسعة والسّاعة الحادية عشر؟

ب) بين السّاعة السّابعة والسّاعة التاسعة ؟

ج) بين السّاعة الخامسة والسّاعة السّادسة ؟

د) بين السّاعة الخامسة والسّاعة السّابعة ؟

هـ) بين السّاعة السّادسة والسّاعة الثّامنة ؟

2. قواعد الحساب في $\mathbb{Z}$

أ) لنتذكّر:

مهما يكن العددان الصّحيحان النسبيّان a و b فإنّ: $(a=b)$ يعني $(a-b=0)$

ب) حساب عبارات بها جمع وطرح :

نشاط 1 أ) أحسب $a+(b-c)$ و $(a+b)-c$ حيث $a=-5$ و $b=6$ و $c=4$.

قارن $a+(b-c)$ و $(a+b)-c$.

ب) اختر ثلاثة أعداد صحيحة نسبيّة a و b و c وأحسب $a+(b-c)$ و $(a+b)-c$.

ج) تحقّق أنّ $a+(b-c)=(a+b)-c$.

لنتذكّر:

مهما تكن الأعداد الصّحيحة النسبيّة a وb وc فإنّ :

$$a+(b-c)=(a+b)-c$$
$$=a+b-c$$

أطبق :

لحساب المجموع $997+(-3253)$ يمكننا استعمال النّتيجة السّابقة :

لاحظ أنّ $997=1000-3$

استعمل هذا لحساب المجموع : $997+(-3253)$

أحسب بنفس الطّريقة : $5998+(-76248)$ ، $504-3996$

نشاط 2 أحسب $a-(b+c)$ و $(a-b)-c$ حيث $a=7$ و $b=-2$ و $c=-3$. قارن $a-(b+c)$ و $(a-b)-c$

اختر ثلاثة أعداد صحيحة نسبيّة a وb وc وأحسب $a-(b+c)$ و $(a-b)-c$.

تحقّق أنّ $a-(b+c)=(a-b)-c$

لنتذكّر:

مهما تكن الأعداد الصّحيحة النسبيّة a وb وc فإنّ :

$$a-(b+c)=(a-b)-c$$
$$=a-b-c$$

أطبق :

أحسب $47+(47+15)-19$

نشاط 3 أحسب وقارن $a-(b-c)$ و $(a-b)+c$ حيث $a=-6$ و $b=-9$ و $c=5$. اختر ثلاثة أعداد صحيحة نسبيّة a وb وc وأحسب $a-(b-c)$ و $(a-b)+c$. تحقّق أنّ

$$a-(b-c)=(a-b)+c$$

لنتذكّر :

مهما تكن الأعداد الصّحيحة النسبيّة a وb وc فإنّ :

$$a-(b-c)=(a-b)+c$$
$$=a-b+c$$

أطبق :

أ) أحسب $2873-877$ بالإعتماد على النّتيجة السّابقة

ب) أحسب $321-(64-79)+64$

* مهما تكن الأعداد الصّحيحة النسبيّة a وb وc فإنّ :

$$a+(b-c)=a+b-c \quad ،a-(b+c)=a-b-c \quad ،a-(b-c)=a-b+c$$

* عند حذف الأقواس المسبوقة بعلامة "+" لا نغيّر العلامات الموجودة داخل الأقواس بينما نغيّر كلّ هذه العلامات عندما تكون الأقواس مسبوقة بعلامة "−".

اطبق :

1 أ) أحذف الأقواس من العبارات التّالية حيث a و b و c و d أعداد صحيحة نسبيّة :

$A = a-(12-b+c)$ و $B = -13-(-5-b-a+c)$

و $C = c+(b-a)-(1-c)-(-a-14+c-b)$.

ب) أنقل على كرّاسك العبارتين $a-b-c-3$ و $a-b+c+3$ حيث a و b و c أعداد صحيحة نسبيّة ثمّ ضع أقواسا في المكان المناسب في العبارة الثانية لتتساوى العبارتان.

2 احسب ذهنيّا: $-15-(-15)$; $-7-(-8)$; $15-(-15)$; $7-(-8)$; $-7-8$; $7-8$

$-3+6-10$; $-3-6-10$; $3-6-10$; $3+6-10$

$-4-(5-9)$; $-4-(9-5)$; $4-(5-9)$; $4-(9-5)$.

نشاط 4 a و b و c أعداد صحيحة نسبيّة. بيّن أنّ $(a+c)-(b+c)=a-b$

وأنّ $(a-c)-(b-c)=a-b$

لنتذكّر :

مهما تكن الأعداد الصّحيحة النّسبيّة a و b و c فإنّ :

$(a+c)-(b+c)=a-b$ و $(a-c)-(b-c)=a-b$

- نستنتج من القاعدة السّابقة أنّ المساواة بين عددين لا تتغيّر إذا أضفنا إلى طرفيها أو طرحنا منهما نفس العدد أي مهما تكن الأعداد الصّحيحة النّسبيّة a و b و c فإنّ :

$(a=b)$ يعني $(a+c=b+c)$

$(a=b)$ يعني $(a-c=b-c)$

اطبق :

1) اعتمد إحدى النّتائج السّابقة لحساب : $13816-7816$ و $14213-7513$.

2) أحسب ذهنيّا $(13816-2937)-(7816-2937)$ و $(14213+2994)-(7513+2994)$.

III. مقارنة الأعداد الصّحيحة النّسبيّة

نشاط 1 1) انقل الجدول التّالي على كرّاسك ثمّ أكمله

العدد a	العدد b	أقارن a وb باستعمال <	أحسب الفرق a–b	أحدّد علامة الفرق (a-b)
5	3	b < a	2	الفرق (a-b) موجب قطعا
123	223			
227	137			
262	1302			

2) أتمم ما يلي :

b < a يعني الفرق (a-b) عدد.....

a < b يعني الفرق (a-b) عدد.....

نشاط 2 انقل الجدول التّالي على كرّاسك ثمّ أكمله

العدد a	العدد b	أحسب الفرق a-b	أحدّد علامة الفرق (a-b)
5	-3	8	الفرق (a-b) موجب قطعا
123	-223		
-111	-57		
-115	-165		
-151	132		

إذا كان الفرق (a-b) موجبا قطعا نقول أنّ b أصغر من a ونكتب b < a .

وإذا كان الفرق (a-b) سالبا قطعا نقول أنّ a أصغر من b ونكتب a < b.

لنتذكّر:

مهما يكن العددان الصّحيحان النّسبيّان a و b فإنّ :

a أصغر من b أو مساو له يعني أنّ (a-b) عدد سالب.

a أصغر من b يعني أنّ (a-b) عدد سالب قطعا.

ونستنتج أنّ :

كلّ عدد صحيح نسبيّ موجب هو أكبر من صفر أو مساو له.

كلّ عدد صحيح نسبيّ سالب هو أصغر من صفر أو مساو له.

كلّ عدد صحيح نسبيّ سالب هو أصغر أو مساو لكلّ عدد صحيح نسبيّ موجب.

مهما يكن العددان الصّحيحان النّسبيّان a و b فإنّ: $(a \leq b)$ يعني $(a-b \leq 0)$

أطبق :

1 أنقل الجدول التّالي على كرّاسك ثمّ أكمله

العدد a	العدد b	أقارن a و b باستعمال < أو≤
115	-312	
213	-213	
-127	-571	
-302	-135	
-13	152	
-121	-121	

2 جد ذهنيّا : أ) العدد الصحيح النسبيّ الّذي هو أكبر من 12- و أصغر من 10-.

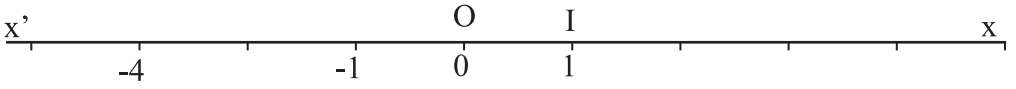
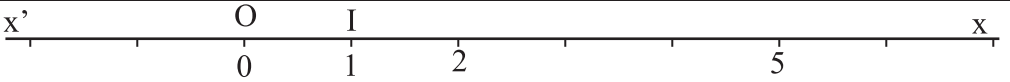
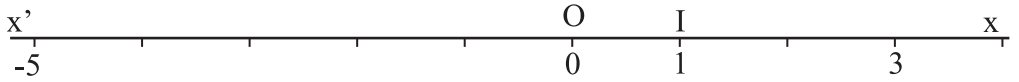
ب) كم من عدد صحيح نسبيّ أكبر من 10- و أصغر من 4- ؟

3 ليكن x عددا صحيحا نسبيّا. نعتبر العددين a و b حيث: $a=13-(x+5)$ و $b=6-x$

أحسب $a-b$ و قارن a و b.

4 a و b عددان صحيحان نسبيّان.قارن العددين A وB حيث : A=-17+(a-b) و B=-12-(b-a)

نشاط 3 انقل الجدول التّالي على كرّاسك ثمّ أكمله

مقارنة العددين	التمثيل على مستقيم مدرّج
$-4<-1$	
-3 8	
2.....5	
-5 3	
$-2<$	

كيف يمكن استغلال التّمثيل على مستقيم مدرّج لمقارنة عددين صحيحين نسبيّين؟

نشاط 4 أ) رتّب تصاعديّا باستعمال الرّمز $<$ الأعداد التّالية :

9 و 12 و 3- و 0 و 16 و 10- و 7- و 2- و 4

ب) أنقل الجدول التّالي على كرّاسك و أكمله:

a	b	$\lvert a\rvert$	$\lvert b\rvert$	أقارن a و b باستعمال $<$	أقارن $\lvert a\rvert$ و $\lvert b\rvert$ باستعمال $<$
-4	-5	4	5	$b<a$	$\lvert a\rvert \prec \lvert b\rvert$
-3	-11				
-9	-2				
-21	-8				

ماذا تلاحظ ؟

لنتذكّر:

مهما يكن العددان الصّحيحان النّسبيّان السّالبان فإنّ أصغرهما هو الّذي له أكبر قيمة مطلقة.

اطبق :

أ) ما هو أكبر عدد صحيح نسبيّ أصغر من 7− ؟

ب) ما هو أصغر عدد صحيح نسبيّ أكبر من 4− ؟

ج) رتّب تصاعديا الأعداد الصحيحة النّسبيّة السّالبة a و b و c حيث $|a|<|b|<|c|$.

د) رتّب تنازليا الأعداد الصحيحة النّسبيّة السّالبة a و b و c حيث $|a|\succ 3$ و $|b|=3$ و $|c|\prec 2$

IV- الضرب في مجموعة الأعداد الصحيحة النسبيّة

1. جذاء عددين صحيحين نسبيّين

نشاط 1) اقترض رجل من بنك 450 دينارا في ثلاث مناسبات بحساب 150 دينارا في كل مرة وللتعبير على ذلك بعملية نكتب $(-150)\times 3=-450$

احسب بنفس الطريقة الجذاءات التّالية : $25\times(-16)$; $7\times(-250)$; $4\times(-15)$

2) أ) باستعمال الآلة الحاسبة احسب : $(-3)\times(-150)$ ، $(-3)\times 150$.

ب) ماذا تلاحظ مقارنة مع الجذاء 3×150 ؟

3) لنا $42\times 5=210$ و $125\times 8=1000$. ما هي، في نظرك، نتيجة كل جذاء من الجذاءات التّالية :

$(-5)\times(42)$; $(5)\times(-42)$; $(-8)\times(-125)$ ؟

لنتذكّر:

– جذاء عددين صحيحين نسبيين مختلفي العلامة هو عدد صحيح نسبي سالب قيمته المطلقة هي جذاء القيمتين المطلقتين لهاذين العددين	**قاعدة العلامات :**
– جذاء عددين صحيحين نسبيين لهما نفس العلامة هو عدد صحيح نسبي موجب قيمته المطلقة هي جذاء القيمتين المطلقتين لهاذين العددين	– جذاء عددين لهما نفس العلامة هو عدد موجب. – جذاء عددين مختلفي العلامة هو عدد سالب.

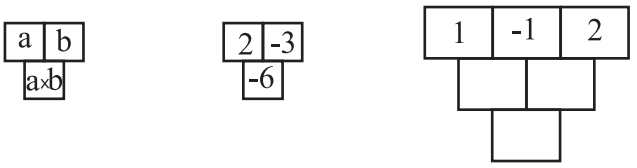
أطبق :

1 انقل واتمم جدول الضرب المقابل للأعداد الصحيحة النسبيّة من 3- إلى 3 :

				3				
				2				
				1				
				0				
-3	-2	-1	0	×	0	1	2	3
				0				
				-1				
				-2				
				-3				

2 احسب $(-12)\times 9$; $(-4)\times(-125)$; $16\times(-23)$

3 أنقل وأكمل الأعداد المناسبة في الخانات الشاغرة بالشكل التّالي حسب الطريقة المرفقة به :



4 جد عددين صحيحين نسبيّين x و y بحيث : أ) $xy=-18$ ، ب) $xy=12$ ، ج) $|xy|=10$

أعط كلّ الإمكانيّات.

في جذاء لا تحذف الأقواس لعدد سالب إلاّ إذا كان هو عامله الأوّل.

فـ $7\times(-4)$ تكتب أيضا 7×-4 و $(-6)\times(-5)$ تكتب أيضا $-5\times(-6)$

5 احسب : $(-75)\times(-32)$; 25×-8

2. خاصيّات الضرب في $\mathbb{Z}$

نشاط أحسب وقارن :

أ) $7\times(-5)$ و $(-5)\times7$ ، ب) $(-14)\times((-6)\times5)$ و $((-14)\times5)\times(-6)$ ،

ج) $[11+(-5)](-8)$ و $11\times(-8)+(-5)\times(-8)$ ،

د) $[(-3)-(-10)]\times(-12)$ و $(-3)\times(-12)-(-10)\times(-12)$

لنتذكّر:

- مهما تكن a و b العددان الصّحيحان النّسبيّان فإنّ: $a\times b=b\times a$
  ونقول أنّ الضرب في $\mathbb{Z}$ هي عمليّة تبديليّة
- مهما تكن a و b و c أعدادا صحيحة نسبيّة فإنّ : $(a\times b)\times c=a\times(b\times c)$
  ونقول أنّ الضرب في $\mathbb{Z}$ هي عمليّة تجميعيّة
- مهما تكن a و b و c أعدادا صحيحة نسبيّة فإنّ : $a\times(b+c)=a\times b+a\times c$
  ونقول أنّ الضرب في $\mathbb{Z}$ هي عمليّة توزيعيّة على الجمع
- مهما تكن a و b و c أعدادا صحيحة نسبيّة فإنّ : $a\times(b-c)=a\times b-a\times c$
  ونقول أنّ الضرب في $\mathbb{Z}$ هي عمليّة توزيعيّة على الطرح

أطبق :

علما أنّ $20\times34=680$ و $3\times34=102$ أحسب دون القيام بعمليّة الضّرب كلاّ من الجذاءات التالية:

$34\times(-17)$ و 34×23 و $34\times(-18)$ و 34×15 و $(-34)\times35$.

3. جذاء عدّة أعداد صحيحة نسبيّة

ملاحظة : كما في $\mathbb{N}$ لا يتغيّر جذاء عدّة أعداد صحيحة نسبيّة :

- بتغيير ترتيب عوامله.
- ولا بتعويض بعض من عوامله بجذائها.
- ولا بتعويض أحد عوامله بجذاء يساويه.

أطبق :

1 نعتبر الجذاءين A و B حيث: $A=(-30)\times4\times(-27)\times25$ ، $B=(-25)\times28\times30$.

يمكننا حساب A كما يلي :

$$\begin{aligned}A&=(-30)\times4\times(-27)\times25\\&=4\times25\times(-30)\times(-27)\\&=100\times(-30)\times(-27)\\&=100\times810\\&=81000\end{aligned}$$

و

$$\begin{aligned}B&=(-25)\times28\times30\\&=(-25)\times(4\times7)\times(3\times10)\\&=(-25\times4)\times(7\times3)\times10\\&=(-100)\times21\times10\\&=-1000\times21\\&=-21000\end{aligned}$$

2 أحسب بأيسر طريقة

$C=(-45)\times 24$; $D=25\times(-18)$; $E=(-105)\times(-12)$;

$F=5\times(-17)\times 3\times(-20)$; $G=(-125)\times 32\times 25$

حدّد دون انجاز العمليّات علامة كلّ من الجذاءات التّالية

$(-7)\times(-2)\times 11\times(-3)\times(-4)\times 3\times(-9)$;

$(-15)\times 13\times(-105)\times(-17)$; $(-103)\times(-17)\times(-37)\times 11\times(-12)$;

لنتذكّر:

يكون جذاء عدّة أعداد صحيحة نسبيّة موجبا إذا كان عدد العوامل السّالبة لهذا الجذاء زوجيّا.

يكون جذاء عدّة أعداد صحيحة نسبيّة سالبا إذا كان عدد العوامل السّالبة لهذا الجذاء فرديّا.

4. النشر وكتابة مجموع في صيغة جذاء

أ. نشر جذاء إلى مجموع حدود

نشاط لنعتبر الجذاءات التّالية :

$A=-2\times(a+1)$ و $B=b\times(a-2)$ و $C=(a-1)\times(-3)$ و $D=a\times(b+c-d)$

حيث a و b و c و d أعداد صحيحة نسبيّة. A تساوي أيضا $1\times(-2)+a\times(-2)$

نقول إنّنا قمنا بنشر الجذاء $-2\times(a+1)$.

حوّل بقيّة الجذاءات B و C و D إلى كتابات جمعيّة مستعملا توزيعيّة الضّرب على الجمع والطّرح في $\mathbb{Z}$

نقول عندئذ إنّك قمت بنشر هذه الجذاءات.

ب. كتابة مجموع في صيغة جذاء

نشاط لنعتبر المجاميع التّالية : $R=ab-bc+bd$ و $Q=3a-9$ و $S=-8ab+5a$ و $T=2a+6b$

حيث a و b و c و d أعداد صحيحة نسبيّة.

يمكن كتابة T على النحو التّالي : $T=2a+2\times(3b)$. T هو مجموع الجذاءين 2a و $2\times(3b)$ اللّذين يشتركان في نفس العامل 2.

يمكن أن نحوّل T إلى جذاء : $T=2\times(a+3b)$

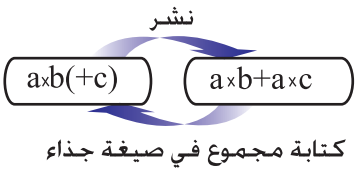
فنقول إنّنا كتبنا المجموع في صيغة جذاء.

حوّل كلاّ من المجاميع S و Q و R إلى جذاء عاملين.

* a و b و c هي أعداد صحيحة نسبيّة

المرور من الجذاء a(b+c) إلى المجموع ab+ac يسمّى نشرا للجذاء a(b+c)

المرور من المجموع ab+ac إلى الجذاء a(b+c) يسمّى كتابة المجموع ab+ac في صيغة جذاء



* النشر وكتابة مجموع في صيغة جذاء هما إجراءان متعاكسان.

5. الحساب في $\mathbb{Z}$

أ. أولويّة العمليّات

نشاط احسب العبارتين : $A=-2\times(5+6)$ و $B=-2\times5+6$

لحساب A نقوم أوّلا بحساب ما بداخل القوسين أي بعمليّة الجمع $5+6=11$ ثم بعد ذلك بعمليّة الضرب $-2\times11=-22$ فنجد $A=-22$

لحساب B نقوم أوّلا بعمليّة الضرب $-2\times5=-10$ ثمّ بعمليّة الجمع $-10+6=-4$ فنجد $B=-4$

الفرق في كتابة العبارتين $A=-2\times(5+6)$ و $B=-2\times5+6$ هو وجود أقواس في كتابة A تشير إلى أولويّة عمليّة الجمع.

لنتذكّر:

عند عدم وجود أقواس تشير إلى أولويّة العمليّات فإنّ عمليّة الضرب لها أولويّة على عمليّتي الجمع والطرح أي ننجز عمليّة الضرب قبل عمليّتي الجمع والطرح.

أطبق :

1 a و b و c هي أعداد صحيحة نسبيّة. ما هي أولويّة العمليّات لحساب كلّ عبارة من العبارات التّالية :

$A=a+b\times c$ و $B=(a-b)\times c$ و $C=a\times b-c$ و $D=a-b\times c$ و $E=a\times(b-c)$ ؟

2 1) أحسب : أ) $X=-3\times(2-7)-16$ و $Y=-3\times2-7-16$

ب) $Z=15-13\times2+17$ و $T=15-(13\times2+17)$

2) ضع أقواسا في المكان المناسب لكي تكون المساواة صحيحة :

أ) $-10=5\times(-4)-(-3)\times2$ ، ب) $10=5(-4)-(-3)\times2$ ، ج) $34=5\times(-4)-(-3)\times2$

ب .المجموع الجبريّ

نشاط لنعتبر الأعداد الصحيحة النسبيّة a و b و c.

- a+b+c هو مجموع وحدوده a و b و c.
- $a-b+c$ هوكذلك مجموع وحدوده a و b– و c لأنّ : a-b+c=a+(-b)+c

  نقول إنّ a-b+c هو مجموع جبريّ.
- كذلك $a-b-c$ و $a+b-c$ هما مجموعان جبريان.

أ- أكتب المجاميع الجبريّة التّالية في صيغة مجاميع : $A=a-12+b-c$

و $C=(a-6)-(b-7)+(c-15)$

ب- أكتب المجاميع التّالية في صيغة مجاميع جبريّة : $T=(-25)+(-138)+(-2)$

و $S=a+(-b)+(-12)+(-c)$

اطبق :

1. a و b و c هي أعداد صحيحة نسبيّة. أنشر واختصر :

$A=2(-3a+5b)+6(b-a)$

و $B=-5(-a+3b)+7(2b-a+3)$ و $C=(-2+a-b)(5-a)-a(b-2)$

2. احسب ذهنيّا $3\times(-11)\times(-3)$; $(-5)\times(-2)\times(-8)$; $(-1)\times4\times10\times(-5)$

3. نعتبر الجذاء التّالي: $P=-1\times(-2)\times(-3)\times\ldots\times(-9)\times(-10)$

أ - هل العدد P موجب أم سالب ؟

ب- بكم من صفر ينتهي العدد P ؟

أحوصـل

- مجموع عددين صحيحين نسبيين لهما نفس العلامة هو عدد صحيح نسبيّ قيمته المطلقة هي مجموع القيمتين المطلقتين للعددين وعلامته هي علامة العددين.
- مجموع عددين صحيحين نسبيين مختلفي العلامة هو عدد صحيح نسبيّ قيمته المطلقة هي الفرق بين أكبر وأصغر قيمة مطلقة للعددين وعلامته هي علامة العدد الّذي له أكبر قيمة مطلقة .
- مهما يكن العددان النسبيان a وb فإنّ : a+b=b+a

  ونقول أنّ الجمع في $\mathbb{Z}$ هي عمليّة تبديليّة.
- مهما تكن الأعداد الصحيحة النسبيّة a وb وc فإنّ : (a+b)+c=a+(b+c) ونقول أنّ الجمع في $\mathbb{Z}$ هي عمليّة تجميعيّة.
- لا يتغيّر مجموع عدّة أعداد صحيحة نسبيّة بتغيير ترتيب حدوده ولا بتعويض بعض من حدوده بمجموعها ولا بتعويض أحد حدوده بمجموع يساويه.

طرح عدد صحيح نسبيّ يعني إضافة مقابله أي a-b=a+(-b) حيث a وb عددان صحيحان نسبيّان.

- مهما يكن العددان النسبيّان فإنّ : (a=b) يعني (a-b = 0)
- عند حذف الأقواس المسبوقة بعلامة "+" لا تتغيّر العلامات الموجودة داخل الأقواس بينما تتغيّر كلّ هذه العلامات عندما تكون الأقواس مسبوقة بعلامة "-"
- مهما يكن العددان الصّحيحان النّسبيّان a وb فإنّ : $(a \leq b)$ يعني $(a-b \leq 0)$

  و $(a \prec b)$ يعني $(a-b \prec 0)$
- جذاء عددين صحيحين نسبيين مختلفي العلامة هوعدد صحيح نسبي سالب قيمته المطلقة هي جذاء القيمتين المطلقتين لهذين العددين.

- جذاء عددين صحيحين نسبيين لهما نفس العلامة هو عدد صحيح نسبي موجب قيمته المطلقة هي جذاء القيمتين المطلقتين لهاذين العددين.
- في جذاء لا تحذف الأقواس لعدد سالب إلاّ إذا كان هو عامله الأوّل.
- مهما يكن العددان النسبيان a و b فإنّ : $a\times b=b\times a$ ونقول أنّ الضرب في $\mathbb{Z}$ هي عمليّة تبديليّة.
- مهما تكن الأعداد الصحيحة النسبيّة a و b و c فإنّ : $(a\times b)\times c=a\times(b\times c)$ ونقول أنّ الضرب في $\mathbb{Z}$ هي عمليّة تجميعيّة.
- مهما تكن الأعداد الصحيحة النسبيّة a و b و c فإنّ : $a\times(b+c)=a\times b+a\times c$ ونقول أنّ الضرب في $\mathbb{Z}$ هي عمليّة توزيعيّة على الجمع.
- مهما تكن الأعداد الصحيحة النسبيّة a و b و c فإنّ: $a\times(b-c)=a\times b-a\times c$ ونقول أنّ الضرب في $\mathbb{Z}$ هي عمليّة توزيعيّة على الطرح
- لا يتغيّر جذاء عدّة أعداد صحيحة نسبيّة بتغيير ترتيب عوامله ولا بتعويض بعض من عوامله بجذاء يساويه.

التمارين

1 أحسب : $(-20)+(-80)$ ، $(+394)+206$ ، $(-36)+(-124)$ ، $(-128)+345$ ، $104+213$ ،
$96+(-271)$ ، $(+18)+(-314)$ ، $105+(-105)$

2 أحسب : $(+13)+(-21)+(-13)$ ، $(-43)+35+(+8)$ ، $(-38)+(-29)+(-22)$ ،
$(-65)+(-4)+(-16)$ ، $200+(-20)+(-205)$ ، $3+(-3)+(-12)$

3 نعتبر الأعداد الصّحيحة النسبيّة $a=-26$ و $b=-14$ و $c=36$ و $d=10$
أحسب :

أ) $a+b$ و $c+d$ ثمّ $(a+b)+(c+d)$.

ب) $a+c$ و $b+d$ ثمّ $(a+c)+(b+d)$،

ج) $a+d$ و $b+c$ ثمّ $(a+d)+(b+c)$. ماذا تلاحظ ؟ لماذا ؟

4 أحسب $|a+b|$ و $|a|+|b|$ في كلّ حالة من الحالات التّالية :

1) أ) $a=-7$ و $b=-13$ ، ب) $a=8$ و $b=15$ ، ج) $a=-12$ و $b=-9$.

ما هي، في كلّ مرّة ، علامة كلّ من a و b ؟ قارن $|a+b|$ و $|a|+|b|$.

2) أ) $a=-10$ و $b=6$ ، ب) $a=23$ و $b=-15$ ، ج) $a=-21$ و $b=35$.

ما هي، في كلّ مرّة، علامة كلّ من a و b ؟ قارن $|a+b|$ و $|a|+|b|$.

5 a و b عددان صحيحان نسبيّان حيث $|a|=8$ و $|b|=7$.
أحسب المجموع $a+b$ مقدّما جميع الحلول الممكنة.

6 جد العدد الصحيح النسبيّ x في كلّ حالة من الحالات التّالية :
$12+(x+37)=12$ ، $214+[(-65)+x]=0$ ، $x+(-15)+4=4$

7 a و b هما عددان صحيحان نسبيّان يحقّقان $a+b=-10$.

8 أحسب $A=(46+a)+b$ ، $B=(-35+b)+a$ ، $C=(-23+a)+b$ ، $D=b+(-18)+a$

جد مقابل كلّ عدد من الأعداد التّالية : 42، مقابل (23-)، 0، $|-12|$، مقابل $(-|-6|)$

9 a و b و c هي أعداد صحيحة نسبيّة بحيث $a+b+c=2$.

أ) جد a إذا علمت أنّ b و c متقابلان.

ب) جد b إذا علمت أنّ $a=c=3$

ج) جد c إذا علمت أنّ $|a|=|b|=2$ وأنّ a و b لهما نفس العلامة (قدّم كلّ الحلول الممكنة).

10 احسب $21-14$، $17-0$ ، $(-19)-(-34)$ ، $(-13)-(-13)$ ، $(-15)-0$ ، $0-(-16)$ ، $(-12)-110$ ، $(-23)-(-213)$.

11 احسب $15-41$ ، $(-15)-41$ ، $-15-41$ ، $(-15)-41-$

12 إذا علمت أنّ $|a|=8$ و a موجب و $|b|=5$ و b. أحسب $a-b$.

13 أ) أحسب $318-215$ و $318+215$

ب) أحسب بدون إنجاز أيّة عمليّة :

$(215-306)-(318-306)$ ، $(215+1237)+(318-1237)$ ، $(215+47)-(318+47)$ ، $(215-48)+(318+48)$

14 أحسب بطريقتين : $-21+(13-17)$ ، $-37-(12-23)$ ، $15-(17+32)$ ، $112-[86-(-68)]$، $27-(-13-14)$، $310+(-12-21)$ ، $-100+[180-(-20)]$ ، $(-15)-(-14+14)$

15 احسب المجاميع التالية :

$C=63-15+27-63-32$; $B=245-142-358-245$; A=6-4-9+2-7

$D=(3-5+8)-(12-7+4)$; $E=-(2-8)-[3-5-(6-9)]$

16 احسب

$J=83+(-12)+(-21)+92+12+(-6)$; $N=-67+(-5)+93+(-28)+7+(-5)$

$R=-2,5+4+(-7)+2,5+11+(-18)$; $F=(18-12)-(5-9)-(7-4)+(1-3)$;

$G=-(15-23+35)+(25-8)-(-65+11)$

17 أ) أحسب $|a-b|$ ثمّ $|a|-|b|$ في الحالات التّالية : $a=102$ و $b=-23$ ، ب) $a=-21$ و $b=-15$ ، ج) $a=18$ و $b=13$ ، د) $a=12$ و $b=19$.

ب) في أيّ حالة من الحالات السّابقة تتحقّق فيها المساواة : $|a-b|=|a|-|b|$ ؟ أعط أمثلة لذلك.

18 أ) أحسب الجذاءات التّالية :

$(-5)\times(-12)$ و $(-15)\times(-23)$ و $(-10)\times(+725)$ و $4\times(-37)$ و $(-17)\times17$

و $(-1)\times(-4327)$ و $0\times(-345)$ و $(-25)\times(-25)$

19 ب)أحسب $A=3\times(-5)\times(-8)$ ، $B=(-2)\times(-4)\times(-5)$ ، $C=2\times(-4)\times5$ ، $D=2\times(-3)\times4\times(-5)$ ، $E=(-3)\times(-5)\times(-7)\times(-9)$ ، $F=(-2)\times(+4)\times6\times(-8)$

20 1) أعط علامة كلّ عدد من الأعداد التّالية دون حسابها

$A=(-13)\times(-6)\times17$ ، $B=(-11)\times(-7)\times5\times(-2)$ ،

$C=(-7)\times(-6)\times(-5)\times(-4)\times(-3)\times(-2)\times(-1)$

2) قارن العددين التّاليين دون حسابهما:

أ) $A=(-4)\times(-11)\times13\times(-6)$ و $B=(-4)\times11)\times(-13)\times6$

ب) $C=(-8)\times(-4)\times(-3)\times9\times(-2)$ و $D=8\times(-4)\times(-3)\times(-9)\times(-2)$

ج) $E=(-5)\times(-6)\times3\times7\times(-4)$ و $F=(-7)\times5\times6\times(-3)\times4$

21 تحقّق أنّ $555=15\times37$ و $851=23\times37$. باستعمال النتائج السابقة، أحسب الجذاءات التّالية :

38×37 و -8×37 و 30×37 و 53×37 و -46×37

22 أحسب بطريقتين الجذاء $a\times(b+c)$ في كلّ حالة من الحالات التّالية :

أ) $a=-16$ و $b=-5$ و $c=13$ ب) $a=12$ و $b=-7$ و $c=-13$ ج) $a=-6$ و $b=-25$ و $c=-15$ د) $a=6$ و $b=25$ و $c=15$

23 أحسب ثمّ قارن : أ) $3+(-4)\times7$ و $[3+(-4)]\times7$ ، $7\times4-3$ ب) $3\times[(-4)-7]$ و $3\times(-4)-7$ ، ج) $-6\times5+3\times4-7$ و $-6\times(5+3)\times4-7$ ، د) $10+2\times(-5)-4$ و $10+(-5)\times(-4+2)$

24 أكتب في صيغة جذاء العبارات التّالية : $12a-4$، $-4a-28$، $-35+10a$، $5a-ab$، $7ab-14b$، $2-6a+10b$، حيث a و b عددان صحيحان نسبيّان.

25 x و y عددان صحيحان نسبيّان. أكتب بأبسط صيغة :

أ) $2x-9y+3x+5y$، ب) $3+y-5x+6y$، ج) $-15y-y+10x-x$

26 a و b عددان صحيحان نسبيّان. أنشر وأكتب بأبسط صيغة :

أ) $2(3a-b)+3(b-a)$، ب) $-3(-b+2a)+2(a-5b)$، ج) $(1-3a)(2-b)+(-2+a)b$

27 أحسب بطريقتين : $A=(-7)\times13+(-7)\times(-13)$ ، $B=(-15)\times6+(-15)\times4$ ، $C=43\times(-9)+(-9)\times57$ ، $D=(-3)\times[(-4)+14]$ ، $E=[(-5)+(-18)]\times(-20)$

28 أحسب : $a=7\times(10-1\times3)\times(12-15+5)$ ، $b=23+17\times(10-11\times3)$، $c=13-9\times(120-15\times5)$ ، $d=8\times(11-7\times2)$ ، $e=13\times(6-5)-(28-23)$ ، $f=6\times(12-48+6)+(7-3\times5)$

4

الأعداد الكسريّة النّسبيّة

I الأعداد العشريّة النسبيّة

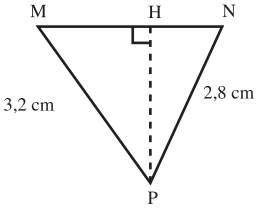
II الأعداد الكسريّة النسبيّة

III القيمة المطلقة لعدد كسريّ نسبيّ

الأعداد الكسرية النسبية

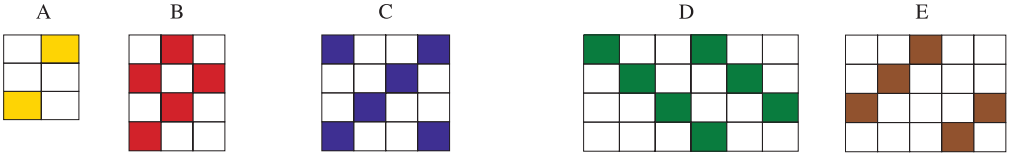
أستحضـــر :

1 يمثل الشكل التالي مثلثا MNP و[PH] الارتفاع الصادر من P.



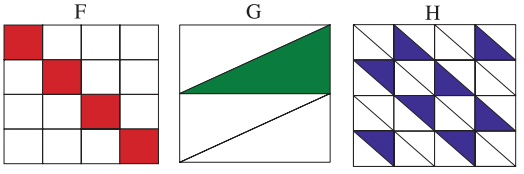
احسب PH إذا علمت أنّ محيط المثلث MNP يساوي 8,7cm وأنّ مساحته تساوي $3,564cm^2$.

2 1) أ) عبّر بعدد كسري عن المساحة الملونة في كل شكل من الأشكال التالية :

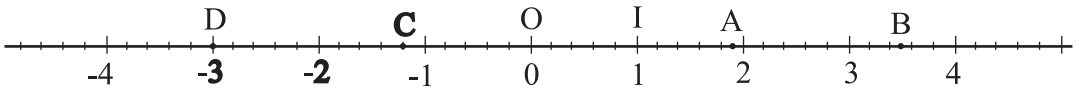


ب) رتّب تصاعديّا المساحات الملونة.

2) فسّر لماذا مساحة الجزء الملوّن من H تساوي مساحة الجزء الملوّن من G و تساوي مساحة الجزء الملوّن من F .



3 نعتبر المستقيم المدرّج التالي



حدّد فاصلات النقاط A و B و C ورتّبها تنازليّا.

4 أكمل بما يناسب من العلامات التالية : $=$ ، $\prec$ ، $\succ$

$\frac{5}{3}\ldots\frac{35}{21}$ ، $\frac{14}{42}\ldots\frac{2}{7}$ ، $\frac{25}{100}\ldots\frac{1}{4}$ ، $\frac{11}{20}\ldots\frac{65}{100}$ ، $\frac{0,4}{3}\ldots\frac{2}{15}$ ، $\frac{11}{12}\ldots\frac{3}{4}$.

5 أ) كيف يمكنك إظهار الأعداد التالية 25,23584 ; 11,54 ; 0,007 ; 51,7 على شاشة الآلة الحاسبة بدون استعمال زر الفاصل ؟

ب) اكتب العدد 58,17 على شاشة الآلة الحاسبة. كيف يمكنك استعمال هذا العدد الموجود على الشاشة لإظهار الأعداد التالية : 58170 ، 5817 ، 581,7 ؟

استكشف واطبّق :

I . الأعداد العشريّة النسبيّة

نشاط 1 1) قارن 13,72 و $13+\frac{72}{100}$ و $\frac{1372}{100}$

2) ما هما الجزء الصحيح والجزء العشريّ للعدد 5,432 ؟

أكتب هذا العدد على صورة $\frac{a}{10^n}$ حيث a و n عددين صحيحين طبيعيين.

* 13,72 هو عدد عشريّ
* 13 يسمّى الجزء الصحيح لهذا العدد و72 يسمّى جزؤه العشريّ
* الكتابة $\frac{1372}{10^2}$ أو $\frac{1372}{100}$ هي كتابة للعدد العشريّ 13,72 على صورة $\frac{a}{10^n}$ حيث a=1372 و n= 2

نشاط 2 انقل وأتمم تعمير الجدول التّالي :

العدد	الجزء الصحيح	الجزء العشري	كتابته على صورة $\frac{a}{10^n}$
13.72	13	72	$\frac{1372}{10^2}$
			$\frac{31}{10}$
2.575			
	0	25	
	3	047	

نشاط 3 1) نعتبر الأعداد التّالية 10^1 و 10^2 و 10^3 و 10^4 و 10^7 و 10^n

أ) فكّك كلّ منها إلى جذاء عوامل أوليّة.

ب) ما هي القواسم الأوليّة لكلّ واحد منها ؟

2) أ) هل يمكن كتابة العدد $\frac{2}{3}$ على صورة $\frac{a}{10^n}$ ؟ هل العدد $\frac{2}{3}$ هو عدد عشريّ ؟

ب) اختزل $\frac{80}{120}$ إلى أقصى حدّ. هل العدد $\frac{80}{120}$ هو عدد عشريّ ؟

ج) هل العدد $\frac{105}{84}$ هو عدد عشريّ ؟

لتكن $\frac{a}{b}$ كتابة مختزلة إلى أقصى حدّ لعدد كسري.

يكون هذا العدد الكسريّ عددا عشريّا إذا كانت القواسم الأوليّة للمقام b هي 2 أو 5 أو 2 و5.

اطبق :

1 أحسب الأعداد التّالية : $3-1,9$ ، $2,13+7,869$ ، $2:\frac{25}{7}$ ، $2\times\frac{3}{5}$

2 ما هي الأعداد العشريّة من بين الأعداد التّالية : $\frac{15}{60}$ ، $\frac{8}{44}$ ، $\frac{10}{14}$ ، $\frac{3}{5}$ ، $\frac{51}{6}$ ، $\frac{12}{8}$ ؟

تمرين مرفق بحلّ

تعرّف، من بين الأعداد التّالية، إلى الأعداد العشريّة واكتبها على صورة $\frac{a}{10^n}$ حيث a و n عددان صحيحان طبيعيّان

$\frac{21}{24}$ ، $\frac{15}{66}$ ، $\frac{630}{4500}$ ، $\frac{27}{60}$

الحل :

1) هل أنّ العدد $\frac{21}{24}$ عدد عشريّ ؟

نختزل أوّلا $\frac{21}{24}$ إلى أقصى حدّ

* لدينا $\frac{21}{24}=\frac{3\times7}{3\times8}=\frac{7}{8}=\frac{7}{2^3}$. إذن فالكتابة $\frac{7}{8}$ (أو $\frac{7}{2^3}$) هي كتابة للعدد $\frac{21}{24}$ مختزلة إلى أقصى حدّ.

* القاسم الأوّلي للعدد 8 هو 2 إذن العدد $\frac{7}{8}$ (أو $\frac{21}{24}$) هو عدد عشريّ ويمكن بالتّالي كتابته على صورة $\frac{a}{10^n}$ حيث a و n عددان صحيحان طبيعيّان كما يلي :

$$\frac{7}{8}=\frac{7\times5^3}{2^3\times5^3}=\frac{875}{(2\times5)^3}=\frac{875}{10^3}$$

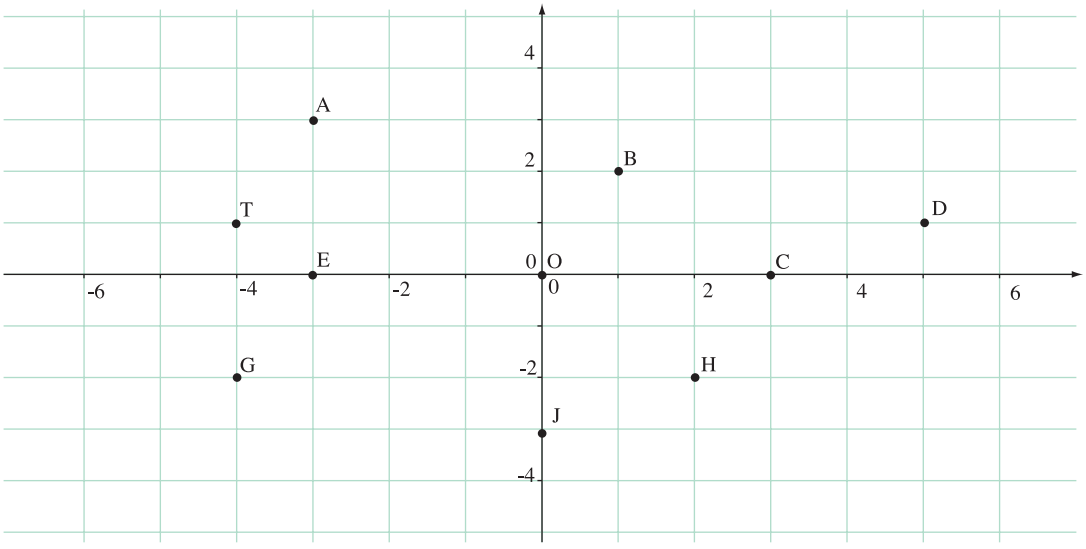
2) هل أنّ العدد $\frac{15}{66}$ عدد عشريّ ؟

$$\frac{15}{66}=\frac{5}{22}=\frac{5}{2\times11}$$

المقام 22 له قاسم أوّلي يختلف عن 2 و5 وهو العدد 11 وبالتّالي فالعدد $\frac{5}{22}$ (أو $\frac{15}{66}$) لي عشريّا.

3) اعتمد نفس التّمشي بالنّسبة للعددين $\frac{630}{4500}$ و $\frac{27}{60}$.

نشاط 4 تأمّل التّعيين التّالي في المستوي



أ) أكتب إحداثيات كلّ نقطة من النّقاط A وD وG وH

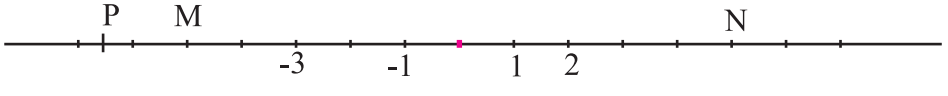
ب) ما هي النّقاط الّتي فاصلاتها موجبة ؟

ت) ما هي النّقاط الّتي ترتيباتها سالبة ؟

ث) أنقل وأتمم الجدول التّالي

النّقطة	زوج الإحداثيات	الفاصلة	التّرتيبة
B(1,2)	(1,2)	1	2
	(-1,1)		
		-3	3
H(,)			
	(3,0)		
		-4	-2

نشاط 5 نعتبر المستقيم المدرّج التّالي



1) ما هي فاصلات النّقاط M وN وP ؟

2) انقل الرّسم وعيّن النّقاط O وA وB وC وD وE الّتي لها الفاصلات التّالية

0 و2,5 - و4 و3,5- و6,5

نرمز بـ $\mathbb{D}$ لمجموعة الأعداد العشريّة النسبية

ونرمز بـ $\mathbb{D}_+$ لمجموعة الأعداد العشريّة الموجبة

كما نرمز بـ $\mathbb{D}_-$ لمجموعة الأعداد العشريّة السالبة

نشاط 6 أ) أكتب كلّ عدد من الأعداد التّالية على صورة $\frac{a}{10^n}$ حيث a وn عددان صحيحان طبيعيّان :

13,123 ، $\frac{7}{5}$ ، $\frac{5}{4}$ ، $\frac{7}{20}$ ، 5,5

ب) استنتج كتابة على صورة $-\frac{a}{10^n}$ لكلّ عدد من الأعداد التّالية حيث n وa عددان صحيحان طبيعيّان.

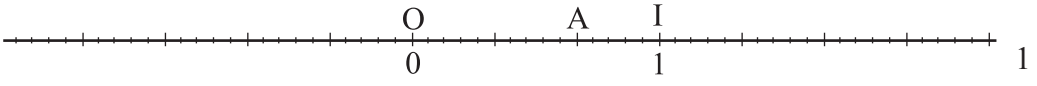
-0,35 ، -5,5 ، -1,25 ، -1,4 ، -13,123

* كل عدد عشريّ موجب يمكن كتابته على صورة $\frac{a}{10^n}$ حيث n وa عددين صحيحين طبيعيّين.

* كلّ عدد عشريّ سالب يمكن كتابته على صورة $-\frac{a}{10^n}$ حيث n وa عددين صحيحين طبيعيّين.

II . الأعداد الكسريّة النسبيّة

نشاط 7 يمثل الرسم أسفله مستقيما مدرّجا



1) أ) أنقل الرّسم على كرّاسك.

ب) ما هو من بين الأعداد الكسريّة التّالية : $\frac{11}{15}$ ، $\frac{2}{3}$ ، $\frac{3}{5}$ ، العدد الّذي يمثّل فاصلة النقطة A ؟

2) أ) عين النقطتين B وC التي فاصلتهما على التوالي 0,6 و1-. ابن B' وC' وA' مناظرات النقاط B وC وA بالنّسبة إلى O.

ب) حدّد فاصلة B' وC'. عبّر بعدد كسريّ عن فاصلة A'.

كلّ عدد كسري نسبي يمثل نقطة وحيدة من مستقيم

نعلم أنّ $\frac{21}{7}=3$ لأنّ $3\times7=21$ كذلك نكتب $\frac{-21}{7}=-3$ لأنّ $(-3)\times7=-21$

و $\frac{21}{-7}=-3$ لأنّ $(-3)\times(-7)=21$

وهكذا فإنّ العدد الكسريّ $-\frac{21}{7}$ أي -3 يكتب $\frac{-21}{7}$ و $\frac{21}{-7}$.

ولدينا $\frac{21}{7}=\frac{-21}{-7}$ ، فسّر ذلك.

مهما يكن العددان الصّحيحان الطّبيعيّان a و b حيث $b\neq 0$ فإنّ :

$\frac{-a}{b}=\frac{a}{-b}=-\frac{a}{b}$ و $\frac{-a}{-b}=\frac{a}{b}$

إذا كان $\frac{a}{b}$ عددا كسريّا موجبا فإنّه يكتب أيضا $+\frac{a}{b}$

اطبق :

1 أكتب كلّ عدد من الأعداد التالية : $-\frac{11}{2}$; $\frac{1}{-7}$; -4 ; $-2,5$; $\frac{2}{-3}$; $-\frac{5}{9}$

على صورة $\frac{a}{b}$ حيث a عدد صحيح نسبيّ و b عدد صحيح طبيعيّ مخالف للصفر.

نسمّي عددا كسريّا نسبيّا كلّ عدد يكتب على صورة $\frac{a}{b}$ حيث a عدد صحيح نسبيّ و b عدد صحيح طبيعيّ مخالف للصفر. نرمز بـ

$\mathbb{Q}$ لمجموعة الأعداد الكسريّة

$\mathbb{Q}_+$ لمجموعة الأعداد الكسريّة الموجبة

$\mathbb{Q}_-$ لمجموعة الأعداد الكسريّة السالبة

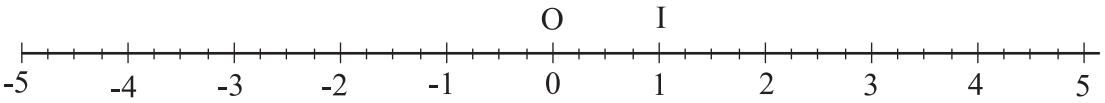
2 أنقل وأتمم بـ $\notin$, $\subset$, $\not\subset$, $\in$

$\mathbb{Q}\ldots\mathbb{N}$ ، $\mathbb{N}\ldots\mathbb{D}$ ، $\mathbb{Z}\ldots\mathbb{D}$ ، $\mathbb{Q}\ldots\mathbb{D}$ ، $\mathbb{Z}\ldots\mathbb{Q}$ ، $\mathbb{Z}\ldots\mathbb{N}$ ، $-\frac{2}{11}\ldots\mathbb{Q}$ ،

$\frac{5}{3}\ldots\mathbb{Q}$

III . القيمة المطلقة لعدد كسريّ نسبيّ

نشاط 1 نعتبر المستقيم المدرّج التّالي حيث O أصل التدريج و OI=1.



1) أ) أنقل الرسم وعيّن النقطة A الّتي فاصلتها 4 ثمّ عيّن 'A مناظرتها بالنسبة للنقطة O .

ما هي فاصلة 'A ؟

ب) ما هو البعد OA ؟ ما هو البعد 'OA ؟

2) أ) أرسم النقطتين C و D فاصلتاها على التّوالي $-\frac{5}{4}$ و $\frac{3}{2}$.

ب) ارسم 'C و 'D مناظرتي C و D بالنسبة للنقطة O. ما هي فاصلة 'C ؟ما هي فاصلة 'D ؟

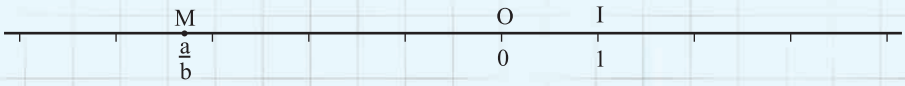
ج) قارن OC و 'OC ثمّ OD و 'OD

3) لتكن M نقطة من المستقيم المدرّج بعدها $\frac{9}{4}$ عن النقطة O. ما هي فاصلتها؟ أرسم M.

4) لتكن N نقطة من المستقيم المدرّج فاصلتها عدد كسري نسبي $\frac{a}{b}$.

ما هو بعدها عن النقطة O ؟

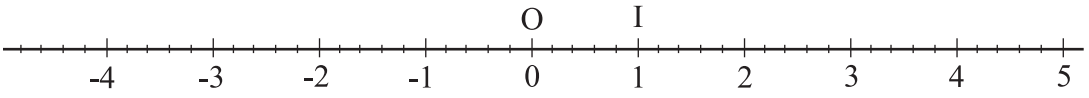
ليكن $\frac{a}{b}$ عددا كسريّا نسبيّا و M نقطة فاصلتها $\frac{a}{b}$ على مستقيم مدرّج بنقطتين O و I حيث O أصل التدريج و OI=1



* القيمة المطلقة للعدد الكسريّ النسبيّ $\frac{a}{b}$ هو البعد OM. نرمز بـ $\left|\frac{a}{b}\right|$ للقيمة المطلقة للعدد الكسريّ النسبيّ $\frac{a}{b}$

نشاط 2

1) أنقل المستقيم المدرّج التّالي على كراسك حيث OI=1cm.



2) أ) عيّن نقطة M حيث $OM=\frac{12}{5}$. ما هي فاصلة M ؟

ب) ما هي النقاط المنتمية لهذا المستقيم والتي تبعد 4,8 عن النقطة O ؟

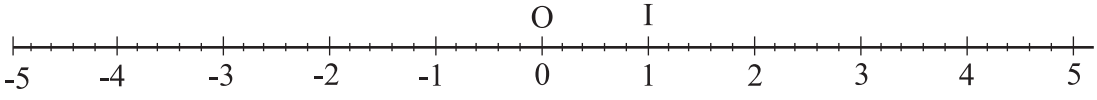
3) عيّن النقاط الّتي فاصلاتها $\frac{a}{b}$ حيث $\left|\frac{a}{b}\right|=\frac{17}{5}$.

نشاط 3

1) أ) احسب القيم المطلقة التّالية : $|4,5|$ ، $\left|\frac{-9}{4}\right|$ ، $|-3|$ ، $|-4,5|$ ، $\left|\frac{9}{4}\right|$ ، $|3|$.

ب) قارن $|4,5|$ و $|-4,5|$ ، $|-3|$ و $|3|$ ، $\left|\frac{9}{4}\right|$ و $\left|-\frac{9}{4}\right|$.

2) نعتبر المستقيم المدرّج التّالي حيث O أصل التّدريج و OI=1



أ) لتكن M نقطة من المستقيم المدرّج فاصلتها عدد كسري نسبي $\frac{a}{b}$. ما هو بعدها عن النقطة O ؟

ب) حدّد فاصلة 'M مناظرة M بالنسبة لـ O. قارن البعد OM والبعد 'OM. استنتج أنّ $\left|-\frac{a}{b}\right|=\left|\frac{a}{b}\right|$

مهما يكن العدد الكسريّ النسبيّ $\frac{a}{b}$ فإنّ :

$\left|\frac{a}{b}\right|=\frac{a}{b}$ يعني $\frac{a}{b}$ عددا كسريّا موجبا.

$\left|\frac{a}{b}\right|=-\frac{a}{b}$ يعني $\frac{a}{b}$ عددا كسريّا سالبا.

$\left|\frac{a}{b}\right|=\left|-\frac{a}{b}\right|$

أطبّق :

1 أحسب $\left|-(-\frac{7}{4})\right|$ ، $|-9|$ ، $|0|$ ، $\left|-\frac{5}{13}\right|$ ، $|-3{,}8|$ ، $\left|\frac{2}{5}\right|$

2 جد إن أمكن، العدد $\frac{a}{b}$ في كلّ حالة من الحالات التّالية :

$\left|\frac{a}{b}\right|=\frac{4}{5}$; $\left|\frac{a}{b}\right|=-6$; $\left|\frac{a}{b}\right|=2$; $\left|\frac{a}{b}\right|=0$

3 ليكن $\frac{a}{b}$ عددا كسريّا. أثبت أنّ

$\left|\frac{a}{b}\right| = 0$ **يعني** $\frac{a}{b} = 0$ وأنّ $\left|\frac{a}{b}\right| = 0$ **يعني** $a = 0$.

أحوصـــل

- لتكن $\frac{a}{b}$ كتابة مختزلة إلى أقصى حدّ لعدد كسريّ .

يكون هذا العدد الكسري عددا عشريّا إذا كانت القواسم الأوليّة للمقام b هي 2 أو 5 أو 2 و5.

- كلّ عدد عشري موجب يمكن كتابته على صورة $\frac{a}{10^n}$ حيث n و a عددين صحيحين طبيعيّين.
- كلّ عدد عشري سالب يمكن كتابته على صورة $-\frac{a}{10^n}$ حيث n و a عددين صحيحين طبيعيّين.
- ليكن $\frac{a}{b}$ عددا كسريّا نسبيّا و M نقطة فاصلتها $\frac{a}{b}$ على مستقيم مدرّج بالنقطتين O و I حيث O أصل التدريج و OI=1. القيمة المطلقة لـ $\frac{a}{b}$ هي $\left|\frac{a}{b}\right| = OM$
- مهما يكن العدد الكسريّ النسبيّ $\frac{a}{b}$ فإنّ :

$\left|\frac{a}{b}\right| = \frac{a}{b}$ يعني $\frac{a}{b}$ عددا كسريّا موجبا.

$\left|\frac{a}{b}\right| = -\frac{a}{b}$ يعني $\frac{a}{b}$ عددا كسريّا سالبا.

$\left|\frac{a}{b}\right| = \left|-\frac{a}{b}\right|$

تمـــارين

1 1) أرسم على كرّاسك مستطيلا طوله 7cm وعرضه 4cm.

2) قسّمه إلى سبعة مستطيلات متقايسة.

3) لوّن منه خمسة مستطيلات.

4) أ) عبّر بعدد كسري عن المساحة الملوّنة.

ب) عبّر بعدد كسري عن المساحة غير الملوّنة.

5) أ) قسّم المستطيل السابق الى 28 مربّعا مساحة كلّ واحد منها $1cm^2$

ب) عبّر بعدد كسري عن المساحة الملوّنة.

ج) عبّر بعدد كسري عن المساحة غير الملوّنة.

2 حدّد الأعداد العشريّة النسبية من بين الأعداد التّالية واكتبها على صورة $\frac{a}{10^n}$ حيث n و a عددين صحيحين طبيعيّين.

-5 ؛ 0 ؛ $\frac{15}{4}$ ؛ $\frac{21}{15}$ ؛ $\frac{5}{7}$ ؛ $\frac{6}{33}$ ؛ $\frac{5}{17}$ ؛ $-15,4$ ؛ $\frac{14}{35}$

$-\frac{165}{1320}$ ؛ $\frac{120}{780}$ ؛ $-2,75$.

3 انقل واتمم بـ $\in$; $\notin$; $\subset$; $\not\subset$

أ) $-5,45$....ID ؛ $\frac{11}{2}$....$\mathbb{Z}_+$ ؛ $\frac{5}{9}$...$\mathbb{Z}$ ؛ $\mathbb{N}$...$\mathbb{Q}_+$ ؛ $\frac{2}{3}$....ID ؛ $\mathbb{Q}$...$\mathbb{Z}$.

ب) $\mathbb{Q}$...$\{1\ ;\ -2\ ;\ 2,5\}$ ؛ ID....$\left\{\frac{5}{4}\ ;0\ ;\ -\frac{15}{14}\ ;\ 5,21\right\}$ ؛ $\mathbb{Z}$...$\left\{-37\ ;\ -25\ ;\ \frac{21}{7}\ ;\ 11,78\right\}$

4 نعتبر المجموعات التّالية

$A=\left\{-\frac{15}{8}\ ;\ -5\ ;\ 0,7\ ;\ \frac{2}{5}\ ;\ 3\right\}$ و $B=\{-9\ ;\ -5\ ;\ 3\ ;\ 18\}$ و $C=\left\{-9\ ;\ \frac{2}{5}\ ;\ \frac{5}{3}\ ;\ \frac{11}{4}\ ;\ 21,9\right\}$

1) أ) أيّ هذه المجموعات محتواة في المجموعة $\mathbb{Z}$ ؟

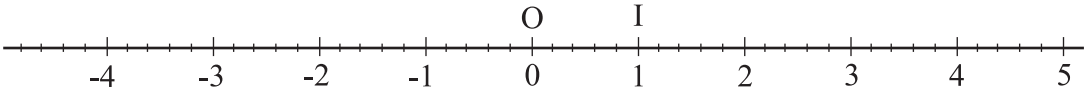
ب) أيّ هذه المجموعات محتواة في المجموعة ID ؟

ج) أيّ هذه المجموعات محتواة في المجموعة $\mathbb{Q}$ ؟

2) حدّد المجموعات التّالية

$A \cap B$; $A \cup C$; $B \cap C$; $A \cup B$; $A \cap C$; $C \cap ID$; $A \cap \mathbb{Z}_+$

5 1) أنقل المستقيم التّالي المدرّج بالنقطتين O و I حيث O أصل التدريج و OI=1.



2) أ) عيّن النّقاط A وB وC وD وE وF الّتي فاصلاتها على التّوالي $\frac{-4}{5}$ ؛ -2 ؛ $\frac{9}{2}$ ؛ $\frac{11}{5}$ ؛ $-1{,}5$ ؛ $-\frac{7}{4}$

ب) أحسب الأبعاد OA وOB وOC وOD وOE وOF .

ج) عيّن نقطة M من (OI) فاصلتها عدد كسري m حيث $|m|=\frac{5}{2}$ (اذكر كلّ الحالات).

د) عيّن نقطة N من (OI) حيث $ON=3{,}4$. ما هي فاصلة النقطة N ؟ (اذكر كلّ الحالات).

هـ) عيّن النقطة P من (OI) الّتي فاصلتها العدد كسري p حيث $|p-3|=0$.

6 1) ارسم معيّنا (O,I,J) في المستوي.

2) عيّن النقاط التّالية $I'(0\ ;\ -1)$ ؛ $A(-2\ ;\ 1)$ ؛ $B(\frac{7}{2}\ ;\ -\frac{1}{2})$ ؛ $C(-3{,}5\ ;\ 0)$ ؛ $D(-\frac{2}{5}\ ;\ -\frac{11}{4})$ ؛ $E(2{,}5\ ;\ \frac{9}{4})$

3) أ) أرسم المستقيم (AI')

ب) عيّن النقطة M من (AI') الّتي فاصلتها 3-. ما هي ترتيبتها ؟

ج) عيّن النقطة N من (AI') الّتي ترتيبها 2- . ما هي فاصلتها ؟

الجمع والطرح في مجموعة الأعداد الكسريّة النسبيّة

I الجمع في مجموعة الأعداد الكسريّة النسبيّة

II الطرح في مجموعة الأعداد الكسريّة النسبيّة $\mathbb{Q}$

III مقارنة عددين كسريين نسبيين باعتماد الفرق بينهما.

IV بعد نقطتين من مستقيم مدرّج.

الجمع والطّرح في مجموعة الأعداد الكسريّة النسبيّة

أستحضـــر :

1 أحسب

أ) $11,6-3,7+4,4+10,3$

ب) $\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{6}$

د) $\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{6}+\frac{1}{12}$

ج) $\frac{1}{3}+\frac{1}{6}-\frac{1}{2}$

هـ) $\frac{1}{4}+\frac{1}{6}+\frac{1}{12}-\frac{1}{2}$

عمليّة الجمع في مجموعة الأعداد الكسريّة الموجبة $\mathbb{Q}_+$ هي

* عمليّة تبديليّة، أي إذا كان $\frac{a}{b}$ و $\frac{c}{d}$ عددين كسريين موجبين فإنّ :

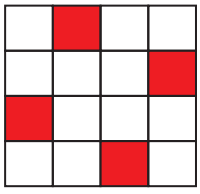
$$\frac{a}{b}+\frac{c}{d}=\frac{c}{d}+\frac{a}{b}$$

* وهي أيضا عمليّة تجميعيّة، أي إذا كانت $\frac{a}{b}$ و $\frac{c}{d}$ و $\frac{e}{f}$ أعدادا كسريّة موجبة فإنّ : $(\frac{a}{b}+\frac{c}{d})+\frac{e}{f}=\frac{a}{b}+(\frac{c}{d}+\frac{e}{f})$

2 أجب بصحيح أو خطأ

أ) $\frac{5}{7}+\frac{3}{7}=\frac{8}{14}$ ب) $\frac{3}{10}+\frac{3}{8}=\frac{3}{18}$ ت) $\frac{5}{7}+\frac{3}{7}=\frac{56}{49}$ ث) $\frac{3}{10}+\frac{3}{8}=\frac{27}{40}$

3 نعتبر المربّع المقابل



أ) عبّر بعدد كسريّ عن مساحة الجزء الملوّن من مساحة المربّع.

ب) لوّن $\frac{5}{12}$ من المساحة الغير الملوّنة.

ت) عبّر بكسر عن المساحة الّتي لم تلوّن من المربّع.

4 $\frac{2}{5}$ تلاميذ إحدى المدارس الإعداديّة مرسّمون بالسّنة السّابعة و $\frac{3}{10}$ تلاميذ هذه المدرسة مرسّمون بالسّنة الثّامنة. عبّر بواسطة عدد كسريّ عن نسبة التّلاميذ المرسّمين بالسّنة التّاسعة ؟

5 يتكوّن فرض من أربعة تمارين.

أنجز تلميذ التّمرين الأوّل في ربع الوقت المخصّص للفرض والتّمرين الثّاني في سدس الوقت والثّالث في ثلث الوقت والرّابع في خمس الوقت وخصّص الثّلاث دقائق المتبقيّة لمراجعة ما كتبه.

عبّر بعدد كسريّ عن الوقت المخصّص للمراجعة. ما هي مدّة إنجاز هذا الفرض ؟

استكشف واطبّق :

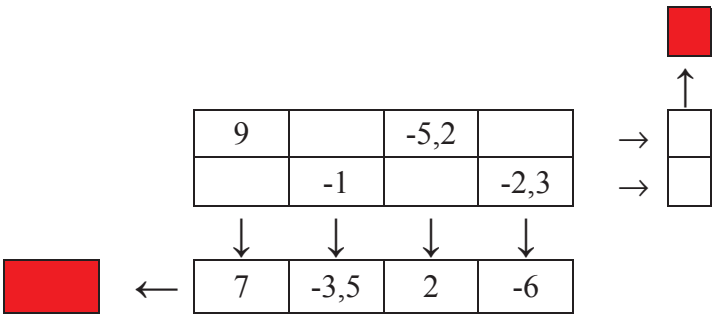
I. الجمع في مجموعة الأعداد الكسريّة النسبيّة

1. جمع الأعداد الكسريّة

نشاط 1 أحسب كما في $\mathbb{Z}$ المجاميع التالية :

$(+19)+(-7,5)$; $3,5+(-4)$; $(-27,6)+(+17,6)$; $(-13,9)+(-22,1)$

نشاط 2 أتمم الجدول حسب الطريقة التّالية : طرف كلّ سهم يحدّد مجموع الأعداد الموجودة بالسطر أو بالعمود الصادر منه (الخاصّ به)



نشاط 3 1) أ) أحسب $-7,5+4,5$ ثم قارن $-\frac{75}{10}+\frac{45}{10}$ و $\frac{-75}{10}+\frac{45}{10}$ و $\frac{-75+45}{10}$

ب) أحسب $-1,5+(-2,5)$ ثمّ قارن $-\frac{3}{2}+(-\frac{5}{2})$ و $\frac{-3}{2}+\frac{-5}{2}$ و $\frac{-3+(-5)}{2}$

ج) أحسب $4,27+(-6,38)$ ثمّ قارن $\frac{427}{100}+(-\frac{638}{100})$ و $\frac{438+(-638)}{100}$

2) أحسب : $125+(-125)$; $\frac{-9}{7}+\frac{9}{7}$; $\frac{5}{8}+(-\frac{5}{8})$; $-3,25+3,25$

إذا كان $\frac{a}{d}$ و $\frac{b}{d}$ عددين كسريّين نسبيّين فإنّ : $\frac{a}{d}+\frac{b}{d}=\frac{a+b}{d}$

اطبّق :

1 أحسب ما يلي :

أ) $\frac{7}{5}+\frac{-4}{5}$ ، ب) $\frac{6}{17}+(-\frac{29}{17})$ ، ج) $-\frac{31}{23}+(-\frac{5}{23})$ ، د) $-4+(-\frac{3}{2})$ ، هـ) $(-3)+(-\frac{2}{9})$.

2 1) وحّد في كلّ حالة مقامي العددين الكسريّين ثمّ أحسب مجموعهما.

أ) $\frac{5}{4}$ و $-\frac{3}{7}$ ، ب) $\frac{-8}{21}$ و $-\frac{7}{3}$ ، ج) $\frac{7}{12}$ و $\frac{4}{-15}$ ، د) 3 و $\frac{-5}{9}$

2) أحسب ما يلي : $\frac{-11}{6}+\frac{-3}{4}$; $-7+\frac{1}{4}$; $3+\frac{-8}{35}$; $(-\frac{5}{21})+\frac{-2}{15}$; $\frac{7}{5}+\frac{-5}{2}$.

2. خاصيّات عمليّة الجمع في المجموعة ℚ

نشاط أنقل الجدول التّالي وأتممه

$\frac{a}{b}$	$\frac{c}{d}$	$\frac{e}{f}$	$\frac{a}{b}+\frac{c}{d}+\frac{e}{f}$
$\frac{-5}{3}$	$-\frac{7}{2}$	$-\frac{3}{2}$	
$\frac{-9}{5}$	$\frac{2}{5}$	0	
$-\frac{11}{20}$	$-\frac{2}{10}$	$\frac{3}{4}$	

- عمليّة الجمع في مجموعة الأعداد الكسريّة النسبيّة ℚ هي
  * عمليّة تبديليّة. أي إذا كان $\frac{a}{b}$ و $\frac{c}{d}$ عددين كسريين نسبيّين فإنّ : $\frac{a}{b}+\frac{c}{d}=\frac{c}{d}+\frac{a}{b}$
  * وهي أيضا عمليّة تجميعيّة، أي إذا كانت $\frac{a}{b}$ و $\frac{c}{d}$ و $\frac{e}{f}$ أعدادا كسريّة نسبيّة فإنّ :
$$(\frac{a}{b}+\frac{c}{d})+\frac{e}{f}=\frac{a}{b}+(\frac{c}{d}+\frac{e}{f})=\frac{a}{b}+\frac{c}{d}+\frac{e}{f}$$
- مهما يكن العدد الكسريّ النسبيّ $\frac{a}{b}$ فإنّ :
$$\frac{a}{b}+0=0+\frac{a}{b}=\frac{a}{b}$$
- مهما يكن العدد الكسريّ النسبيّ $\frac{a}{b}$ فإنّ عددا كسريّا نسبيّا وحيدا $\frac{c}{d}$ يحقّق : $\frac{a}{b}+\frac{c}{d}=0$
$\frac{c}{d}$ يسمّى مقابل العدد $\frac{a}{b}$ ونرمز له بـ : $-\frac{a}{b}$

اطبّق :

1 أحسب :

أ) $3+\frac{2}{5}+(-3)$; $-4+(-\frac{1}{2})+(-1)$; $\frac{5}{2}+(-\frac{3}{8})+\frac{1}{4}$; $-\frac{4}{9}+\frac{1}{5}+\frac{4}{9}$

2 ب) $\frac{2}{3}+(-\frac{5}{2})+(-\frac{1}{4})+(-\frac{2}{3})$; $\frac{-5}{12}+\frac{7}{3}+(-\frac{4}{15})+(-\frac{7}{4})$

أحسب بعد إدخال تغيير مناسب على ترتيب الحدود

أ) $\frac{4}{7}+\frac{3}{4}+(\frac{-5}{7})+(-\frac{5}{4})+\frac{8}{7}+\frac{1}{4}$

ب) $\frac{1}{28}+(-\frac{1}{14})+\frac{3}{28}+\frac{1}{7}+(-\frac{5}{28})+\frac{3}{14}+(-\frac{1}{4})$

II. الطرح في مجموعة الأعداد الكسريّة النسبيّة $\mathbb{Q}$

نشاط 1 تحقّق من أنّ العدد الكسريّ النسبيّ الّذي نضيفه إلى $\frac{11}{5}$ لنتحصّل على $\frac{7}{5}$ هو العدد $-\frac{4}{5}$.

كما في $\mathbb{Z}$ العدد الكسريّ النسبيّ $-\frac{4}{5}$ يسمّى الفرق بين العددين $\frac{7}{5}$ و $\frac{11}{5}$

ونكتب $\frac{7}{5}-\frac{11}{5}=-\frac{4}{5}$.

$\frac{7}{5}$ هو الحدّ الأوّل لهذا الفرق و $\frac{11}{5}$ هو الحدّ الثّاني لهذا الفرق ونقرأ :

$\frac{7}{5}$ إلاّ $\frac{11}{5}$ يساوي $-\frac{4}{5}$.

كذلك $\frac{7}{4}-\frac{13}{3}$ هو العدد الكسريّ الّذي نضيفه لـ $\frac{13}{3}$ للحصول على $\frac{7}{4}$. جد هذا العدد.

* كما في Z طرح عدد كسري نسبيّ يعني إضافة مقابله.
* إذا كان $\frac{a}{b}$ و $\frac{c}{d}$ عددين كسريين فإنّ

$\frac{a}{b}-\frac{c}{d}=\frac{a}{b}+(-\frac{c}{d})$

$\frac{a}{b}-(-\frac{c}{d})=\frac{a}{b}+\frac{c}{d}$

* يسمّى العدد $\frac{a}{b}-\frac{c}{d}$ الفرق بين العدد $\frac{a}{b}$ والعدد $\frac{c}{d}$.

أطبّق :

أحسب

$1-\frac{7}{2}$; $0-(-\frac{5}{6})$; $-4-\frac{3}{11}$; $\frac{1}{15}-\frac{9}{21}$; $-\frac{4}{7}-\frac{5}{3}$; $\frac{3}{2}-(-\frac{5}{8})$

نشاط 2 1) أ) أحسب $\frac{7}{4}-\frac{2}{5}$ و $\frac{2}{5}-\frac{7}{4}$ ثمّ قارن النتيجتين

ب) $\frac{a}{b}$ و $\frac{c}{d}$ عددان كسريّان نسبيّان.

أحسب $(\frac{c}{d}-\frac{a}{b})+(\frac{a}{b}-\frac{c}{d})$.

إستنتج أنّ : $-(\frac{a}{b}-\frac{c}{d})=-\frac{a}{b}+\frac{c}{d}$

2) بيّن أنّ $-(\frac{a}{b}-\frac{c}{d}+\frac{e}{f})=-\frac{a}{b}+\frac{c}{d}-\frac{e}{f}$ حيث $\frac{a}{b}$ و $\frac{c}{d}$ و $\frac{e}{f}$ أعداد كسريّة نسبيّة.

أطبّق :

1 a و b و c و d و e و f أعداد صحيحة نسبية مخالفة للصفر. أكتب بدون أقواس ما يلي :

$+(-a)$; $-(+7,5)$; $-(-\frac{5}{6})$; $-(\frac{c}{b})$; $-(-a-\frac{1}{8})$; $-(+14)-(-\frac{e}{f})$; $-(+d)$

المطلوب إيجاد الكلمة التّالية :

2 نعلم أنّ الأعداد التّالية ... ,7- , 6 , 5- , 4 , 3- , 2 , 1- تناسبها على التوالي الأحرف التّالية

$A,B,C,D,E,F,G,...$

$\frac{-35}{2}-(\frac{12}{5}-\frac{23}{4})+(-\frac{57}{20})$	
العدد x حيث $8,25+x=-\frac{51}{4}$	
$-1-(\frac{7}{3}-\frac{4}{3})-(\frac{5}{7}-\frac{12}{7})$	
البعد بين نقطتين من مستقيم مدرّج فاصلتهما على التّوالي $\frac{21}{2}$ و $-\frac{19}{2}$	
$13,5-(\frac{14}{5}-4,3)-\left(\frac{7}{2}-\frac{71}{6}+\frac{16}{3}\right)$	
$-\frac{7}{2}+\frac{1}{3}-1,25+\frac{1}{6}-\frac{3}{4}$	

تمرين مرفق بحلّ

1) احسب $A=7,2+(-9)+8+6,3+(-14,5)+(-8)$

2) احسب $E=(6-8,5)+(3,1-7)-(-10+9,3)+3,9$.

الحلّ :

1) نلاحظ أنّ (-8) و 8 عددان متقابلان أي $8+(-8)=0$ إذن $A=7,2+(-9)+6,3+(-14,5)$.

نجمع الأعداد الموجبة على حده (وكذلك الأعداد السّالبة) أي $A=7,2++6,3+(-9)+(-14,5)$

يعني $A=13,5+(-23,5)$ إذن $A=-10$.

2) لنحسب E . ننجز المجاميع الموجودة بين قوسين ونحصل على $E=-2,5+(-3,9)-(-0,7)+3,9$.

نعوّض الطرح بإضافة المقابل ويصبح $E=-2,5+(-3,9)+0,7+3,9$ ومنه $E=-2,5+0,7$

وبالتّالي $E=-1,8$.

اطبّق :

3 احسب

$$J=\frac{83}{10}+(-12)+(-21)+\frac{46}{5}+12+(-6);\ N=-6,7+(\frac{-5}{3})+\frac{8}{3}+(-2,8)+\frac{2}{3}+(\frac{5}{-3})$$

$$R=-\frac{5}{2}-4+(\frac{-4}{7})+2,5+1-(\frac{-25}{7})\ ;$$

4 احسب المجاميع التّالية :

$$A=\frac{1}{2}-\frac{2}{3}+\frac{3}{4}-\frac{4}{5}+\frac{5}{6}\ ;\ B=\frac{49}{2}-14,2-\frac{179}{5}-24,5\ ;\ C=6,3-\frac{3}{2}+2,7-\frac{63}{10}-3,2\ ;$$

$$D=-(2,6-\frac{8}{5})-\left[\frac{3}{7}-5,5-(\frac{1}{2}-\frac{11}{7})\right]$$

III. مقارنة عددين كسريين نسبيين باعتماد الفرق بينهما.

1. مقارنة عددين كسريين نسبيّين

نشاط 1 قارن كلّ عدد من الأعداد التّالية $\frac{15}{7}$ ، $\frac{11}{23}$ ، $\frac{21}{35}$ ، $\frac{175}{105}$ بالعدد 1

نشاط 2 تأمّل الشّكل التّالي حيث : $AB=a$ و $CD=b$ و a و b عددان صحيحان طبيعيّان.

1) أ) عبّر بأعداد كسريّة وبدلالة a عن AM و AN

ب) عبّر بأعداد كسريّة وبدلالة b عن CP و CQ

2) قارن $\frac{a}{6}$ و $\frac{b}{6}$ ثمّ $\frac{a}{3}$ و $\frac{b}{3}$

3) قارن $\frac{a}{6}$ و $\frac{a}{3}$ ثمّ $\frac{b}{6}$ و $\frac{b}{3}$

نشاط 3 قارن : أ) $\frac{17}{15}$ و $\frac{29}{25}$ ، ب) $\frac{2}{15}$ و $\frac{4}{25}$

ليكن $\frac{a}{b}$ عددا كسريّا موجبا

$\frac{a}{b}>1$ يعني $a>b$

$\frac{a}{b}<1$ يعني $a<b$

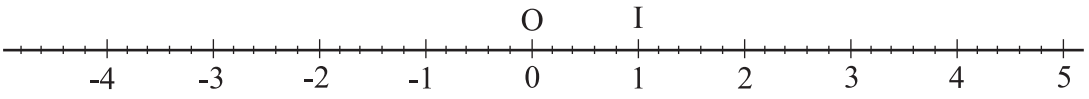
*عددان كسريان موجبان لهما نفس المقام أكبرهما هو الّذي له أكبر بسط.

$a>b$ يعني $\frac{a}{c}>\frac{b}{c}$

* عددان كسريان موجبان لهما نفس البسط أكبرهما هو الّذي له أصغر مقام.

$b<c$ يعني $\frac{a}{b}>\frac{a}{c}$

نشاط 4 لرسم التّالي مستقيما مدرّجا



1) أ) انقل الرّسم وعيّن النقاط A وB وA' وB' الّتي فاصلاتها على التوالي 2+ و3+ و2- و3-

وعيّن النّقطتين C وD التي فاصلتاها

$+\frac{13}{4}$ و $+\frac{16}{5}$

ب) قارن $+\frac{13}{4}$ و $+\frac{16}{5}$

مهما كانت الأعداد الصّحيحة الطبيعيّة a و b

و c و d حيث $b \neq 0$ و $d \neq 0$ فإنّ $-\frac{c}{d} \leq 0 \leq \frac{a}{b}$

2) أ) عيّن النقطتين C' وD' مناظرتي C وD بالنّسبة للنقطة O.

ب) ما هما فاصلتا C' وD' ؟ قارن $-\frac{13}{4}$ و $-\frac{16}{5}$

3) رتّب تصاعديّا الأعداد: 0 و $+\frac{13}{4}$ و $+\frac{16}{5}$ و $-\frac{13}{4}$ و $-\frac{16}{5}$

ليكن $\frac{a}{b}$ و $\frac{c}{d}$ عددين كسريين

$\frac{a}{b} > \frac{c}{d}$ يعني $-\frac{a}{b} < -\frac{c}{d}$

أطبّق :

1 1) قارن أ) $-\frac{7}{15}$ و $-\frac{12}{15}$ ، ب) $-\frac{13}{15}$ و $-\frac{11}{4}$ ، ج) $-\frac{27}{21}$ و $-\frac{17}{14}$

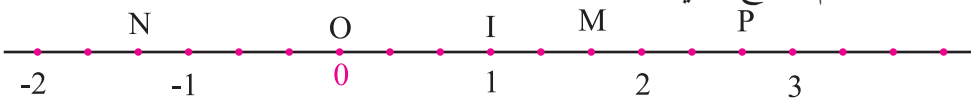
2) أ) رتّب تصاعديّا الأعداد التالية $+\frac{1}{2}$ و $+\frac{4}{5}$ و $+\frac{3}{4}$

ب) استنتج ترتيبا تصاعديّا للأعداد $-\frac{1}{2}$ و $-\frac{4}{5}$ و $-\frac{3}{4}$

2 1) رتّب تصاعديّا الأعداد 2 و $-\frac{3}{4}$ و $\frac{7}{10}$ و $-\frac{3}{2}$ و $\frac{11}{5}$

2) ارسم على مستقيم مدرّج النقاط A , B , C , D , E الّتي فاصلاتها على التوالي الأعداد السابقة.

3 نعتبر المستقيم المدرّج التالي



1) حدّد فاصلات النّقاط M وN وP

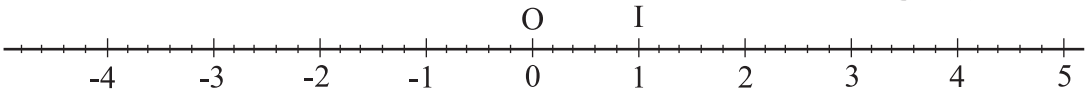
2) أرسم النّقاط A وB وC وD الّتي فاصلاتها على التّوالي $\frac{5}{2}$ و $\frac{1}{3}$ و $-\frac{2}{3}$ و $-\frac{7}{6}$

3) أ) أرسم نقطة K فاصلتها عدد كسري نسبي $\frac{a}{b}$ حيث $\frac{10}{3} < \frac{a}{b} < \frac{11}{3}$

ب) أرسم نقطة L فاصلتها عدد كسري نسبي $\frac{c}{d}$ حيث $-2 < \frac{c}{d} < -\frac{5}{3}$

2. مقارنة عددين كسرين نسبيين باعتماد الفرق بينهما

نشاط 4 نعتبر المستقيم المدرّج التّالي :



1) عيّن النّقاط A وB وC وD الّتي فاصلاتها على التّوالي $-\frac{3}{5}$ و $\frac{12}{5}$ و $-\frac{3}{2}$ و $\frac{5}{2}$

2) أ) قارن : $\frac{5}{2}$ و $\frac{12}{5}$، $-\frac{3}{2}$ و $-\frac{3}{5}$، $\frac{5}{2}$ و $-\frac{3}{5}$

ب) أحسب $\frac{5}{2}-\frac{12}{5}$; $-\frac{3}{2}-(-\frac{3}{5})$; $-\frac{3}{5}-\frac{5}{2}$.

$\frac{a}{b}$ و $\frac{c}{d}$ عددان كسريّان نسبيّان

$\frac{a}{b}-\frac{c}{d}\geq 0$ يعني $\frac{a}{b}\geq\frac{c}{d}$ ، $\frac{a}{b}-\frac{c}{d}<0$ يعني $\frac{a}{b}<\frac{c}{d}$

اطبّق :

1 قارن باستعمال الفرق :

$\frac{32}{31}$ و $\frac{31}{30}$، $-\frac{19}{20}$ و $-\frac{15}{16}$، $\frac{-12}{13}$ و $-\frac{11}{12}$

2 $\frac{a}{b}$ و $\frac{c}{d}$ عددان كسريّان نسبيّان حيث $\frac{a}{b}\geq\frac{c}{d}$

1) قارن أ) $\frac{a}{b}+3$ و $\frac{c}{d}-2$ ، ب) $-\frac{2}{5}+\frac{a}{b}$ و $\frac{c}{d}-\frac{3}{4}$

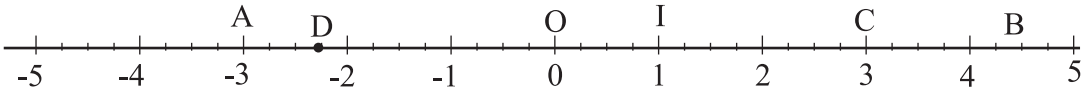
3 $\frac{a}{b}$ و $\frac{c}{d}$ و $\frac{e}{f}$ أعداد كسريّة نسبيّة حيث $\frac{a}{b}-\frac{c}{d}=-\frac{11}{12}$ و $\frac{e}{f}-\frac{c}{d}=\frac{5}{4}$

أ) قارن : $\frac{a}{b}$ و $\frac{c}{d}$ ثمّ $\frac{c}{d}$ و $\frac{e}{f}$.

ب) رتّب $\frac{a}{b}$ و $\frac{c}{d}$ و $\frac{e}{f}$.

IV. بعد نقطتين من مستقيم مدرّج.

نشاط نعتبر المستقيم المدرّج التّالي :



1) نرمز بـ a وb وc وd فاصلات النّقاط A وB وC وD على التّوالي.

حدّد a وb وc وd.

2) أ) أحسب البعد AC. قارن AC و $|c-a|$.

ب) أحسب BD ثمّ قارن BD و $|d-b|$.

ج) قارن : BC و $|c-b|$، AD و $|d-a|$.

ليكن Δ مستقيما مدرّجا بنقطتين O وI حيث O أصل التدريج وOI=1.

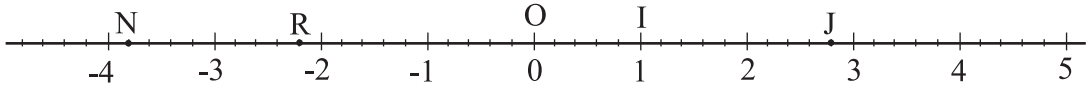
إذا كانت M وN نقطتين من Δ فاصلتاهما على التّوالي عددان كسريّان نسبيّان m وn فإنّ البعد MN يساوي $|n-m|$.

$$MN=|n-m|$$

اطبّق :

1 حدّد فاصلات النقاط R وJ وN واحسب الأبعاد RJ وJN وNR

(نتحقّق من النّتائج على المستقيم المدرّج)



2 1-أ) عيّن نقطتين O وI حيث OI=1cm.

ب) عيّن النّقاط A وB وM وN وP من المستقيم المدرّج (OI) الّتي فاصلاتها على التوالي

$2,5$ و $\frac{14}{5}$ و -1 و $-\frac{3}{2}$ و $-5,5$

2-أ) أحسب AB وMP وMB وMN وAP

ب) أحسب ; $AB-AP$; $MB-MN+MP$; $(AB-AP)-(-MB+MN-MP)$

3) عيّن نقطة C من المستقيم المدرّج (OI) بحيث $IC=3$. ما هي فاصلة النّقطة C؟

(أعط كلّ الإمكانيّات)

4) عيّن النّقطة D من المستقيم المدرّج (OI) بحيث $AD=3$ و $OD=0,5$. ما هي فاصلة D؟

أحوصـل

إذا كان $\frac{a}{d}$ و $\frac{b}{d}$ عددين كسريّين نسبيّين فإنّ $\frac{a}{d}+\frac{b}{d}=\frac{a+b}{d}$

- عمليّة الجمع في مجموعة الأعداد الكسريّة النسبيّة $\mathbb{Q}$ هي عمليّة

* تبديليّة. أي إذا كان $\frac{a}{b}$ و $\frac{c}{d}$ عددين كسريين نسبيّين فإنّ : $\frac{a}{b}+\frac{c}{d}=\frac{c}{d}+\frac{a}{b}$

* وهي أيضا تجميعيّة، أي إذا كانت $\frac{a}{b}$ و $\frac{c}{d}$ و $\frac{e}{f}$ أعدادا كسريّة نسبيّة فإنّ :

$$(\frac{a}{b}+\frac{c}{d})+\frac{e}{f}=\frac{a}{b}+(\frac{c}{d}+\frac{e}{f})=\frac{a}{b}+\frac{c}{d}+\frac{e}{f}$$

- مهما يكن العدد الكسريّ النسبيّ $\frac{a}{b}$ فإنّ : $\frac{a}{b}+0=0+\frac{a}{b}=\frac{a}{b}$
- مهما يكن العدد الكسريّ النسبيّ $\frac{a}{b}$ فإنّ عددا كسريّا نسبيّا وحيدا $\frac{c}{d}$ يحقّق : $\frac{a}{b}+\frac{c}{d}=0$

$\frac{c}{d}$ يسمّى مقابل العدد $\frac{a}{b}$ ونرمز له بـ : $-\frac{a}{b}$

- طرح عدد كسريّ نسبيّ يعني إضافة مقابله
- إذا كان $\frac{a}{b}$ و $\frac{c}{d}$ عددين كسريّين فإنّ

$$\frac{a}{b}-\frac{c}{d}=\frac{a}{b}+(-\frac{c}{d})$$

$$\frac{a}{b}-(-\frac{c}{d})=\frac{a}{b}+\frac{c}{d}$$

- يسمّى العدد $\frac{a}{b}-\frac{c}{d}$ الفرق بين العدد $\frac{a}{b}$ والعدد $\frac{c}{d}$.

- $\frac{a}{b}$ و $\frac{c}{d}$ عددان كسريّان نسبيّان

$\frac{a}{b}-\frac{c}{d}\geq 0$ يعني $\frac{a}{b}\geq\frac{c}{d}$ ، $\frac{a}{b}-\frac{c}{d}<0$ يعني $\frac{a}{b}<\frac{c}{d}$

- إذا كان Δ مستقيما مدرّجا بنقطتين O و I حيث O أصل التدريج و OI=1 وإذا كانت M و N نقطتين Δ فاصلتاهما على التوالي عددان كسريّان نسبيّان m و n فإنّ $MN=|n-m|$.

تمـــارين

1 اجب بصحيح أو خطأ

1) 1,5 و $(\frac{1}{2}+2-)$ هما عددان متقابلان،

2) (-5,3)+(-9,7) هو عدد صحيح نسبيّ،

3) (-1,2)-3,2 هو عدد صحيح نسبيّ،

4) طرح عدد كسريّ نسبيّ هو دائما إضافة مقابله،

5) $-\frac{2}{7}+\frac{7}{2}=\frac{5}{2}-(-\frac{5}{7})$،

6) إذا كانت M وN نقطتين من مستقيم مدرّج فاصلتاهما على التّوالي $\frac{10}{7}$ و $\frac{-3}{7}$ فان البعد MN يساوي 1.

2 حدّد بالنسبة لكلّ واد الإجابة أو الإجابات الصحيحة من بين الثّلاث إجابات المقترحة.

$\frac{3}{4}+\frac{7}{4}=$	$\frac{10}{8}$	$\frac{10}{4}$	$\frac{5}{2}$
$\frac{4}{5}+\frac{7}{3}=$	$\frac{47}{15}$	$3+\frac{2}{15}$	$\frac{11}{8}$
$\frac{11}{3}-\frac{7}{15}=$	$\frac{4}{12}$	$\frac{48}{15}$	$\frac{144}{45}$
$11-\frac{2}{7}=$	$\frac{9}{7}$	$10+\frac{5}{7}$	$\frac{75}{7}$

3 أنقل الجدول التّالي واتمم تعميره

$\frac{a}{b}+\frac{c}{d}-\frac{e}{f}$	$\frac{c}{d}-\frac{e}{f}$	$\frac{a}{b}+\frac{c}{d}$	$\frac{e}{f}$	$\frac{c}{d}$	$\frac{a}{b}$
			$-\frac{1}{5}$	$\frac{3}{5}$	$-\frac{12}{5}$
			$\frac{5}{3}$	$-\frac{3}{4}$	2,7
			$-\frac{5}{2}$	$-\frac{2}{7}$	$\frac{14}{3}$
			$-\frac{4}{15}$	−12,5	−5

4 أحسب أ) $\frac{-5}{4}+\frac{5}{2}-\frac{3}{8}-\frac{7}{8}$ ؛ ب) $\frac{7}{15}-\frac{11}{2}+\frac{9}{4}-\frac{8}{9}$ ؛ ج) $-\frac{2}{5}-\frac{11}{7}+\frac{4}{5}-\frac{13}{35}$

د) $1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\frac{1}{5}-\frac{1}{6}$ ؛ هـ) $\frac{13}{17}-\frac{5}{11}+\frac{12}{5}-\frac{4}{15}-\frac{6}{11}+\frac{21}{17}$

5 أحذف الأقواس ثمّ اختصر العبارات التّالية حيث a و b و c أعداد كسريّة نسبيّة

أ) $A=-(a-b+c)-(b+c-a)$ ، ب) $B=(a-\frac{1}{2})-(b-c-\frac{7}{3})+(b-a-\frac{3}{4})$

ج) $-(-a+\frac{7}{2}-\frac{4}{3}-b)-[(a+b)-(c+a-b-1)]$ د) $c-[(a-2)-(3+c-b)-(a-c)]$

6 ضع مكان النّقاط إحدى العلامات + أو − ليكون الحساب صحيحا

$\frac{4}{3}=\frac{1}{2}\ldots\frac{15}{6}\ldots\frac{10}{3}$ ، $\frac{47}{21}=\frac{8}{21}\ldots\frac{10}{3}\ldots\frac{-5}{7}$ ، $-\frac{7}{4}=\frac{5}{3}\ldots\frac{11}{6}\ldots\frac{7}{4}$ ، $-1=2,5\ldots2\ldots0,5-$

7 1) قارن أ) $-\frac{14}{15}$ و $-\frac{13}{14}$ ، ب) $-7,75$ و $-\frac{29}{4}$ ، ج) $-\frac{26}{3}$ و $-\frac{58}{7}$ ، د) $-\frac{13}{4}$ و $-3,2$

2) رتّب تصاعديّا الأعداد التّالية 0 ؛ $-5,2$ ؛ $\frac{12}{5}$ ؛ $2,3$ ؛ $-\frac{27}{5}$ ؛ $\frac{9}{4}$.

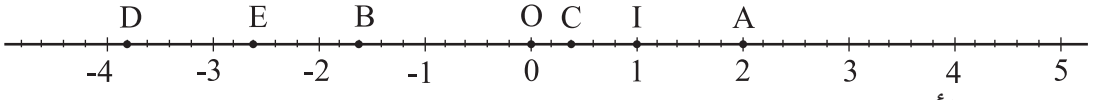
8 أحسب في كلّ حالة العددين A و B ثمّ قارنهما

أ) $A=\frac{6}{5}-\frac{7}{4}$ و $B=-\frac{3}{4}+\frac{2}{3}$ ، ب) $A=\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-7$ و $B=\frac{2}{3}-\frac{5}{6}-\frac{7}{2}$

9 1) أحسب العددين A و B حيث $A=-2,5+\frac{11}{2}-\frac{3}{5}$ و $B=(1-\frac{11}{4}-\frac{2}{5})-(2-\frac{9}{8}-\frac{3}{5})$

2) قارن A و B

10 تأمّل المستقيم المدرّج التّالي وحدّد فاصلات النّقاط A و B و C و D و E



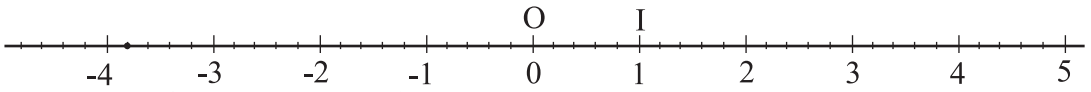
1) احسب الأبعاد IA و EB و BD و CD و AB.

2) عيّن نقطة M من المستقيم المدرّج (OI) بحيث $AM=2,4$. ما هي فاصلتها (أذكر كلّ الحالات) ؟

3) عيّن النّقطة P من المستقيم المدرّج (OI) بحيث $IP=2$ و $AP=3$. ما هي فاصلتها ؟

11 1) رتّب تصاعديّا الأعداد $\frac{-12}{5}$ و $\frac{3}{2}$ و $-2,8$ و $-\frac{4}{5}$ و $\frac{7}{5}$

2) نعتبر المستقيم المدرّج التّالي :



عيّن النقاط M وN وP وQ وR الّتي فاصلاتها على التوالي $\frac{-12}{5}$ و $\frac{3}{2}$ و $-2,8$ و $-\frac{4}{5}$ و $\frac{7}{5}$

3) أحسب الأبعاد MN و PR و PQ و NR .

12 1) x و y عددان كسريّان نسبيّان حيث $x-y=-\frac{1}{4}$ و $z-x=\frac{1}{2}$

احسب $|x-y|$ و $|x-z|$

2-أ) أحسب $(z-x)+(x-y)$

ب) قارن z و y ثمّ احسب $|z-y|$

3) قارن أ) $\frac{3}{4}+x-y$ و $1+z-x$ ب) $\frac{2}{5}+x$ و $1+y-z+x$.

13 أنقل الجدول التّالي وأجب بصحيح أو خطأ

أكبر من ←	2,15	-2,4	-3,1	-2,55
-2				
2,2				
-2,5				
-3				

14 لكلّ سؤال حدّد الإجابة أو الإجابات الصحيحة.

	الأجوبة			
	أ	ب	ت	ج
ما هو العدد الّذي يواصل هذه السلسلة منطقيّا ؟ ... ; -9 ; -4,5 ; 0 ; 4,5	9	-12,5	13,5	-13,5
ينقص هذه السلسلة عددا. ما هو؟ 16 ; 9 ; -5 ; -12 ; -19 ; -26 ; -33	-2	0	2	22
هناك عدد دخيل في السلسلة التالية : ما هو؟ -5,6 ; -1,6 ; 0,4 ; 2,4 ; 6,4 ; 10,4	0,4	2,4	-1,6	6,4
-1+ (-1) + (-1) + (-1) + (-1) =	5	-1	-3	-5
-2,5+ (-2,5)- (-2,5)- 2,5	-5	0	-10	10

الضّرب والقسمة في مجموعة الأعداد الكسريّة النسبيّة

6

I الضرب في $\mathbb{Q}$

II خاصيّات عمليّة الضرب في المجموعة $\mathbb{Q}$

III مقلوب عدد كسري مخالف للصفر

IV قسمة عدد كسري على آخر مخالف للصفر

الضرب والقسمة في
مجموعة الأعداد الكسرية النسبية $\mathbb{Q}$

أستحضـر :

1 أحسب : أ) $\frac{3}{11}\times\frac{25}{4}$ ب) $\frac{8}{3}\times\frac{2}{9}\times\frac{5}{7}$ ج) $\frac{5}{7}\times(\frac{4}{3}-\frac{1}{2})$ د) $14\times(\frac{1}{5}+\frac{3}{2}-\frac{5}{4})$

هـ) $(-7)\times(-2)$ و) $(+13)\times(-9)$

2 كم يساوي : أ) ربع العشرين ؟ ب) خمس المائة ؟ ج) نصف ثلث التسعين ؟

3 تقدر نسبة الزكاة على المال بربع العشر من النصاب.

ما هي قيمة الزكاة الواجبة على كلّ مبلغ من المبالغ التّالية :

5000 د ؛ 17450 د ؛ 9584 د.

أستكشف وأطبّق :

I. الضرب في $\mathbb{Q}$

نشاط 1 1-أ) أحسب بالآلة الحاسبة $1{,}5\times(-1{,}25)$ ثمّ قارن النتيجة المتحصّل عليها بالعدد $-\frac{15}{8}$

ب) أعط كتابة كسريّة مختزلة إلى أقصى حدّ لكلّ عدد من العددين $-1{,}25$ و $1{,}5$

ج) استنتج أنّ $(-\frac{5}{4})\times\frac{3}{2}=-\frac{15}{8}=\frac{(-5)\times 3}{4\times 2}$

2-أ) أعط كتابة كسريّة مختزلة إلى أقصى حدّ لكلّ عدد من الأعداد $-2{,}6$ و $1{,}75$ و $-4{,}55$

ب) أحسب بالآلة الحاسبة $1{,}75\times(-2{,}6)$

ج) استنتج أنّ $\frac{7}{4}\times(-\frac{13}{5})=-\frac{91}{20}=\frac{7\times(-13)}{4\times 5}$

إذا كان $\frac{a}{b}$ و $\frac{c}{d}$ عددين كسريين فإن $\frac{a}{b}\times\frac{c}{d}=\frac{a\times c}{b\times d}$

أطبق :

1) أحسب الجداءات التّالية :

أ) $3,25\times(-2,75)$ ، ب) $(-7,2)\times 11,45$ ، ج) $(-4)\times(-2,5)$ ، د) $(-8,5)\times(-3,25)$

2) أحسب : أ) $2\times(-15)$ ثمّ $\frac{2}{3}\times\frac{-15}{7}$ ؛ ب) $(\frac{-8}{5})\times(-\frac{7}{3})$ ؛ ج) $(-11)\times\frac{-9}{2}$ ؛ د) $15\times(-\frac{23}{4})$

نشاط 2 أنقل الجدول التّالي وأكمل بـ $\mathbb{Q}_+$ أو بـ $\mathbb{Q}_-$

إذا كان	$\frac{a}{b}\in\mathbb{Q}_+$ و $\frac{c}{d}\in\mathbb{Q}_+$	فإنّ	$\frac{a}{b}\times\frac{c}{d}\in$ ....
إذا كان	$\frac{a}{b}\in\mathbb{Q}_-$ و $\frac{c}{d}\in\mathbb{Q}_+$	فإنّ	$\frac{a}{b}\times\frac{c}{d}\in$ ....
إذا كان	$\frac{a}{b}\in\mathbb{Q}_+$ و $\frac{c}{d}\in\mathbb{Q}_-$	فإنّ	$\frac{a}{b}\times\frac{c}{d}\in$ ....
إذا كان	$\frac{a}{b}\in\mathbb{Q}_-$ و $\frac{c}{d}\in\mathbb{Q}_-$	فإنّ	$\frac{a}{b}\times\frac{c}{d}\in$ ....

أطبق :

1) جد علامة كلّ جذاء من الجذاءات التّالية :

$\frac{2}{9}\times\frac{5}{4}$ ؛ $\frac{-8}{5}\times\frac{3}{7}$ ؛ $(-\frac{5}{9})\times(-\frac{11}{3})$ ؛ $\frac{1}{8}\times(-\frac{15}{13})$ ؛ $(-3)\times\frac{5}{14}$ ؛ $(-\frac{17}{21})\times(-5)$

2) $\frac{a}{b}$ و $\frac{c}{d}$ عددان كسريّان موجبان و $\frac{e}{f}$ و $\frac{m}{n}$ عددان كسريّان سالبان.

انقل وأملأ الفراغات بـ $\mathbb{Q}_+$ أو $\mathbb{Q}_-$: $\frac{a}{b}\times\frac{e}{f}\in$.... ؛ $(\frac{-2}{5})\times\frac{m}{n}\in$.... ؛ $\frac{m}{n}\times\frac{e}{f}\in$....

$\frac{c}{d}\times(-\frac{m}{n})\in$.... ؛ $(-\frac{7}{8})\times\frac{e}{f}\in$.... ؛ $(-3)\times(\frac{-m}{n})\in$....

نشاط 3 1) وحّد مقامي العددين الكسريّين النسبيّين $\frac{a}{b}$ و $\frac{c}{d}$

2) برهن أنّ $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$ يعني $a\times d=b\times c$

إذا كان $\frac{a}{b}$ و $\frac{c}{d}$ عددين كسريّين نسبيّين فإنّ : $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$ يعني $a\times d=b\times c$

أطبق :

1 $\frac{a}{b}$ عدد كسريّ و n عدد صحيح طبيعيّ مخالف للصفر

1) بيّن أنّ $\frac{a}{b} = 0$ يعني $a = 0$

2) بيّن أنّ $\frac{a}{b} = \frac{a \times n}{b \times n}$

2 $\frac{a}{b}$ عدد كسريّ موجب و n عدد صحيح طبيعيّ يقسم a ويقسم b

بيّن أنّ $\frac{a}{b} = \frac{a : n}{b : n}$

3 $\frac{a}{b}$ و $\frac{c}{d}$ عددان كسريّان نسبيّان حيث $c \neq 0$

بيّن أنّ $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ يعني $\frac{a}{c} = \frac{b}{d}$

4 نعتبر العددين $\frac{4009275}{2314756}$ و $\frac{847754}{489451}$

1) أ) حدّد رقم آحاد جذاء الطرفين دون حساب هذا الجذاء

ب) حدّد رقم آحاد جذاء الوسطين دون حساب هذا الجذاء

ج) هل العددان $\frac{4009275}{2314756}$ و $\frac{847754}{489451}$ متساويان ؟

2) أحسب باستعمال الآلة الحاسبة

أ) $\frac{4009275}{2314756}$ ، ب) $\frac{847754}{489451}$ ماذا تلاحظ ؟ كيف تفسّر ذلك ؟

3) أ) أحسب باستعمال الآلة الحاسبة $\frac{51044217}{64389876}$ و $\frac{48357083}{61000183}$

ب) هل أنّ هذين العددين متساويين ؟

نشاط 4 a عدد صحيح نسبيّ و b عدد صحيح طبيعيّ مخالف للصفر. أحسب :

$0 \times a$ ؛ $1 \times a$ ؛ $(-1) \times b$ ؛ $0 \times \frac{a}{b}$ ؛ $1 \times \frac{a}{b}$ ؛ $(-1) \times \frac{a}{b}$.

إذا كان $\frac{a}{b}$ عددا كسريّا نسبيّا فإنّ :

$0 \times \frac{a}{b} = \frac{a}{b} \times 0 = 0$ ؛ $1 \times \frac{a}{b} = \frac{a}{b} \times 1 = \frac{a}{b}$ ؛ $(-1) \times \frac{a}{b} = \frac{a}{b} \times (-1) = -\frac{a}{b}$

II . خاصيّات عمليّة الضرب في المجموعة $\mathbb{Q}$

خاصيّات عمليّة الضرب في المجموعة $\mathbb{Q}$ هي نفس خاصيّاتها في $\mathbb{Q}_+$

إذا كان $\frac{a}{b}$ و $\frac{c}{d}$ و $\frac{e}{f}$ أعداد كسريّة نسبيّة فإنّ:

$$\frac{a}{b}\times\frac{c}{d}=\frac{c}{d}\times\frac{a}{b}=\frac{a\times c}{b\times d}$$

$$\frac{a}{b}\times\frac{c}{d}\times\frac{e}{f}=\frac{a}{b}\times(\frac{c}{d}\times\frac{e}{f})=(\frac{a}{b}\times\frac{c}{d})\times\frac{e}{f}$$

$$\frac{a}{b}\times(\frac{c}{d}+\frac{e}{f})=\frac{a}{b}\times\frac{c}{d}+\frac{a}{b}\times\frac{e}{f}$$

$$\frac{a}{b}\times(\frac{c}{d}-\frac{e}{f})=\frac{a}{b}\times\frac{c}{d}-\frac{a}{b}\times\frac{e}{f}$$

أطبق :

1 1) أعط علامة كلّ جذاء من الجذاءات التّالية دون حسابه.

أ) $12\times(-5)\times(-2)$ ؛ $14\times(-5)\times(-1)\times(-7)$ ؛ $(-32,8)\times5,4\times(-6)\times9,5\times(-1)\times(-6,35)$

ب) $(\frac{-4}{7})\times(-15)\times3,5\times(-\frac{5}{9})$ ؛ $(-1,5)\times\frac{1}{4}\times(\frac{-2}{3})\times(-\frac{11}{9})\times(-5)$

2) ما هي علامة :

أ)جذاء خمسة أعداد كسريّة سالبة ؟

ب) جذاء عشرة كسريّة أعداد سالبة ؟

ج)جذاء سبعة عشر عددا كسريّا سالبا ؟

د) جذاء مائة وعشرون عددا كسريّا سالبا ؟

3) كيف يمكن تحديد علامة جذاء أعداد كسريّة نسبيّة قبل حساب هذا الجذاء ؟

لحساب جذاء أعداد كسريّة نسبيّة نحدّد أوّلا علامة هذا الجذاء.

2 1) أحسب :

أ) $(-7)\times(-2)\times(-5)$ ؛ $2,5\times(-8,5)\times(-3)$ ؛ $(-4)\times(-2)\times7\times(-0,5)$

ب) $\frac{5}{4}\times\frac{3}{7}\times\frac{-1}{2}$ ؛ $\frac{2}{7}\times(\frac{5}{3}-\frac{3}{5})$ ؛ $\frac{-5}{9}\times(\frac{1}{2}+\frac{3}{4})$ ؛ $(\frac{7}{5}-\frac{3}{2}+\frac{4}{3})\times(\frac{-2}{3})$.

2) a وb عددان صحيحان مخالفان للصفر. أحسب بدلالة a وb العبارات التّالية :

$\frac{4}{9}(\frac{a}{3}+\frac{a}{2})$ $\frac{2}{5}\times(\frac{a}{b}-\frac{1}{2})$ $\frac{a}{b}\times(7-\frac{5}{4}+\frac{3}{8})$

III. مقلوب عدد كسري مخالف للصفر

نشاط 1 أنقل واتمم بما يناسب

1) $5\times...=4$ ؛ $6\times...=4$ ؛ $...\times 8=-2$ ؛ $4\times...=1$ ؛ $...\times 5=1$ ؛ $9\times....=1$ ؛

2) $\frac{5}{2}\times...=\frac{15}{16}$ ؛ $\frac{-9}{7}\times...=\frac{18}{35}$ ؛ $...\times\frac{3}{-5}=-\frac{21}{10}$ ؛ $-6\times...=\frac{30}{7}$

نشاط 2 أحسب $9\times\frac{1}{9}$ ؛ $-13\times(\frac{1}{-13})$ ؛ $\frac{27}{11}\times\frac{11}{27}$ ؛ $(\frac{-6}{17})\times(\frac{17}{-6})$

ليكن $\frac{a}{b}$ عددا كسريّا نسبيّا مخالفا للصفر.

* لدينا $\frac{a}{b}\times\frac{b}{a}=1$. نقول أنّ العددين $\frac{a}{b}$ و $\frac{b}{a}$ عددان مقلوبان.

* العدد $\frac{b}{a}$ يسمّى مقلوب العدد $\frac{a}{b}$ ونرمز له بـ : $\frac{1}{(\frac{a}{b})}$.

* العدد $\frac{a}{b}$ يسمّى مقلوب العدد $\frac{b}{a}$ ونرمز له بـ $\frac{1}{(\frac{b}{a})}$.

* $\frac{b}{a}=\frac{1}{(\frac{a}{b})}$ و $\frac{a}{b}=\frac{1}{\frac{b}{a}}$.

* عددان مقلوبان هما عددان جذاءهما يساوي 1.

اطبق :

1 1) حدّد مقلوب كلّ عدد من الأعداد التّالية واكتبه على صورة عدد كسريّ مقامه موجب.

5 ، -3 ؛ $\frac{5}{8}$ ؛ $\frac{-6}{7}$ ؛ $\frac{1}{-17}$.

2) أكتب كلّ عدد من الأعداد التّالية على صورة عدد كسريّ مقامه موجب.

$\frac{1}{-2}$ ؛ $\frac{1}{5}$ ؛ $\frac{1}{-6}$ ؛ $\frac{1}{-7}$ ؛ $-\frac{1}{-13}$

أ) حقّق أنّ العددين 6,25 و 0,16 هما عددان مقلوبان وكذلك 0,8- و 1,25-

ب) أحسب ذهنيّا $6,25\times(-0,8)\times(-1,25)\times(0,16)$

2 أنقل الجدول التالي وأتممه

العدد	4	0,1	20	10	0,25	0,01	100	0,05	-2	-8	-0,5	-1,125
مقلوبه					4						-2	

1) حدّد العدد $\frac{a}{b}$ في كلّ حالة من الحالات التّالية

$\frac{5}{9}\times\frac{a}{b}=1$ ؛ $\frac{a}{b}\times(-\frac{7}{6})=1$ ؛ $\frac{b}{a}\times\frac{5}{11}=1$ ؛ $\frac{\frac{1}{a}}{b}=-8$.

2) أحسب العدد x في كلّ حالة ثمّ حدّد مقلوبه

$x=\frac{1}{2}-\frac{2}{5}$ ؛ $x=\frac{6}{5}\times(3-\frac{15}{4})$ ؛ $x=(\frac{9}{4}-\frac{2}{5})(\frac{7}{3}+\frac{1}{2}-\frac{3}{4})$

IV. قسمة عدد كسري على أخر مخالف للصفر

نشاط

أ) أنقل واتمم الجدول التّالي

$\times$	...	...	...	...	...	$-\frac{2}{5}$
$\frac{7}{3}$	$\frac{35}{3}$	$\frac{21}{6}$	$\frac{-7}{12}$	1	$-\frac{35}{33}$	...

ب) أحسب $1\times\frac{3}{7}$; $\frac{-7}{12}\times\frac{3}{7}$; $\frac{21}{6}\times\frac{3}{7}$; $\frac{35}{3}\times\frac{3}{7}$

ج) لنا $-\frac{1}{4}=\frac{\frac{-7}{12}}{\frac{7}{3}}$; $\frac{3}{2}=\frac{\frac{21}{6}}{\frac{7}{3}}$; $5=\frac{\frac{35}{3}}{\frac{7}{3}}$

أتمم $\frac{1}{\frac{7}{3}}=...$; $-\frac{2}{5}=\frac{...}{\frac{7}{3}}$; $\frac{\frac{-35}{33}}{\frac{7}{3}}=...$

إذا كان $\frac{a}{b}$ و $\frac{c}{d}$ عددين كسريّين و $\frac{c}{d}$ مخالفا للصفر فإنّ خارج قسمة العدد $\frac{a}{b}$ على العدد $\frac{c}{d}$ هو جذاء الأوّل ومقلوب الثّاني ونرمز له بـ : $\frac{(\frac{a}{b})}{(\frac{c}{d})}$ أو $\frac{a}{b}:\frac{c}{d}$

* $\frac{(\frac{a}{b})}{(\frac{c}{d})} = \frac{a}{b}:\frac{c}{d}=\frac{a}{b}\times\frac{d}{c}$

أطبق :

1 أحسب : $\frac{\frac{5}{6}}{\frac{2}{9}}$ ؛ $\frac{\frac{-2}{3}}{\frac{7}{4}}$ ؛ $\frac{\frac{7}{8}}{\frac{5}{-9}}$ ؛ $\frac{-\frac{6}{7}}{\frac{1}{3}}$ ؛ $\frac{5}{\frac{-2}{13}}$ ؛ $\frac{\frac{-11}{4}}{-2}$ ؛ $\frac{\frac{1}{3}}{7}$ ؛ $\frac{1}{\frac{3}{7}}$.

2 عبّر بعدد كسريّ عن كلّ عبارة من العبارات التّالية

أ) ثلاثة أرباع الثلثين، ب) سُبعي الخمسة أسداس، ج) نصف الثلثين، د) أربعة أخماس الثمنين

3 قال أحدهم

إذا عاش الفتى ستين عاما فنصف العمر تمحقه الليالي

ونصف النصف يذهب ليس يدري لغفلته يمينا مع شمال

وثلث النصف آمال وحرص وشغل بالمكاسب والعيال

وباقي العمر ....

عبّر بعدد كسريّ عن "باقي العمر" ثمّ حدّده.

4 نعتبر الأعداد التّالية حيث a عدد صحيح موجب و b عدد صحيح سالب

$\frac{a}{(\frac{5}{7})}$ ؛ $\frac{(\frac{-a}{2})}{-3}$ ؛ $\frac{a}{b}$ ؛ $\frac{-5}{2b}$ ؛ $\frac{b}{(-\frac{11}{17})}$ ؛ $\frac{\frac{4}{9}\times b}{5a}$

حدّد علامة كلّ عدد من هذه الأعداد وقيمته المطلقة.

5 أحسب : $\dfrac{1+\frac{5}{3}}{3-\frac{7}{4}}$ ؛ $\dfrac{\frac{-5}{2}-\frac{3}{4}}{\frac{1}{5}-\frac{11}{2}}$ ؛ $\dfrac{3+\frac{1}{4}-\frac{7}{12}}{-1+\frac{1}{3}-\frac{7}{2}}$ ؛ $\dfrac{\frac{4}{9}\times(\frac{6}{7}-\frac{1}{2})}{\frac{1}{4}-\frac{3}{2}+1}$

6 توفي رجل وترك 45500 دينارا وامرأة حاملا وأوصى بما يلي :

خمسان للأم وثلاثة أخماس للمولود إن كان ولدا.

أربعة أسباع للأم وثلاثة أسباع للمولود إن كان بنتا.

1) ما هو نصيب الأم ونصيب المولود

أ) لو كان المولود ولدا ؟

ب) لو كان المولود بنتا ؟

2) إلاّ أنّ امرأته أنجبت توأما ولدا وبنتا.

كيف يمكن تقسيم هذا المبلغ مع احترام الوصيّة ؟

ملاحظة : هذه الوضعيّة مقتبسة من كتاب « Les mathématiques par les problèmes» لمحمّد عكار صفحة 29

أحوصـل

إذا كان $\frac{a}{b}$ و $\frac{c}{d}$ عددين كسريّين فإنّ $\frac{a}{b}\times\frac{c}{d}=\frac{a\times c}{b\times d}$

خاصيّات عمليّة الضرب في المجموعة $\mathbb{Q}$

خاصيّات عمليّة الضرب في المجموعة $\mathbb{Q}$ هي نفس خاصيّاته في $\mathbb{Q}_+$. فهي :

* **تبديليّة** : يعني $\frac{a}{b}\times\frac{c}{d}=\frac{c}{d}\times\frac{a}{b}=\frac{a\times c}{b\times d}$

* **تجميعيّة** : يعني $\frac{a}{b}\times\frac{c}{d}\times\frac{e}{f}=\frac{a}{b}\times(\frac{c}{d}\times\frac{e}{f})=(\frac{a}{b}\times\frac{c}{d})\times\frac{e}{f}$

* **توزيعيّة على الجمع** : يعني $\frac{a}{b}\times(\frac{c}{d}+\frac{e}{f})=\frac{a}{b}\times\frac{c}{d}+\frac{a}{b}\times\frac{e}{f}$

* **توزيعيّة على الطرح** : يعني $\frac{a}{b}\times(\frac{c}{d}-\frac{e}{f})=\frac{a}{b}\times\frac{c}{d}-\frac{a}{b}\times\frac{e}{f}$

حيث $\frac{a}{b}$ و $\frac{c}{d}$ و $\frac{e}{f}$ أعداد كسريّة نسبيّة

* مهما كان العدد الكسريّ النسبيّ $\frac{a}{b}$ فإنّ :

$0\times\frac{a}{b}=\frac{a}{b}\times0=0$ ؛ $1\times\frac{a}{b}=\frac{a}{b}\times1=\frac{a}{b}$ ؛ $(-1)\times\frac{a}{b}=\frac{a}{b}\times(-1)=-\frac{a}{b}$

مقلوب عدد كسريّ مخالف للصفر

* ليكن $\frac{a}{b}$ عددا كسريّا نسبيّا مخالفا للصفر. لدينا $\frac{a}{b}\times\frac{b}{a}=1$

* نقول أنّ العددين $\frac{a}{b}$ و $\frac{b}{a}$ عددان مقلوبان أو أحدهما مقلوب للآخر.

* العدد $\frac{b}{a}$ يسمّى مقلوب العدد $\frac{a}{b}$ ونرمز له بـ: $\frac{1}{(\frac{a}{b})}$ كما أنّ العدد $\frac{a}{b}$ يسمّى مقلوب العدد $\frac{b}{a}$ ونرمز له بـ $\frac{1}{(\frac{a}{b})}$

$\frac{1}{(\frac{a}{b})}=\frac{b}{a}$ و $\frac{1}{(\frac{b}{a})}=\frac{a}{b}$

* عددان مقلوبان هما عددان جذاءهما يساوي 1

قسمة عدد كسري على آخر مخالف للصفر

إذا كان $\frac{a}{b}$ و $\frac{c}{d}$ عددين كسريّين و $\frac{c}{d}$ مخالفا للصفر فإنّ خارج قسمة العدد $\frac{a}{b}$ على العدد $\frac{c}{d}$ هو جذاء الأوّل ومقلوب الثاني ونرمز له بـ : $\frac{(\frac{a}{b})}{(\frac{c}{d})}$ أو $\frac{a}{b}:\frac{c}{d}$

* $\frac{(\frac{a}{b})}{(\frac{c}{d})} = \frac{a}{b}:\frac{c}{d} = \frac{a}{b}\times\frac{d}{c}$

تمـــارين

1 1) في أيّ عدد كسريّ تضرب مساحة مستطيل إذا ضربنا طوله في $\frac{2}{5}$ وعرضه في $\frac{3}{4}$ ؟

2) في أيّ عدد كسريّ يضرب حجم متوازي مستطيلات إذا ضربنا أبعاده في $\frac{1}{2}$ و $\frac{5}{7}$ و $\frac{5}{2}$ ؟

2 أحسب

$\frac{-4}{13}\times\frac{5}{11}$ ؛ $(1-\frac{2}{7})\times(-\frac{4}{5}+\frac{7}{8})$ ؛ $(\frac{1}{2}-\frac{2}{3}+\frac{1}{4})\times(-\frac{5}{7}+\frac{2}{5})$ ؛ $(-3+\frac{6}{5}-\frac{1}{10})\times(\frac{1}{5}-\frac{5}{7}-\frac{2}{3})$

3 أ) احسب $\frac{5}{27}\times\frac{9}{5}$

ب) عدد كسري مجموع ثلث ثلثه وثلث ثلثي ثلثه يساوي $\frac{1}{3}$. ما هو هذا العدد ؟

4 أحسب

$(1-\frac{1}{2})\times(1-\frac{1}{3})\times(1-\frac{1}{4})\times...(1-\frac{1}{99})\times(1-\frac{1}{100})$

5 أحسب

أ) $\frac{1}{(\frac{2}{3})}$ ؛ $\frac{-5}{4}:\frac{8}{9}$ ؛ $\frac{(\frac{-5}{2})}{7}$ ؛ $\frac{(-\frac{7}{15})}{\frac{2}{17}}$ ؛ $\frac{\frac{5}{4}+\frac{2}{5}}{-\frac{3}{7}+\frac{2}{5}}$ ؛ $1+\frac{2}{1-\frac{3}{5-\frac{2}{3}}}$

ب) $\frac{1+\frac{1}{2}-\frac{1}{3}-\frac{1}{4}}{1+\frac{2}{3}-\frac{3}{4}+\frac{3}{5}}$ ؛ $\frac{(-\frac{3}{16}-\frac{7}{12}+\frac{1}{4})\times(\frac{5}{4}-\frac{3}{5})}{(3-\frac{2}{3})\times(\frac{4}{7}-1)}$

6 1) أحسب العدد $3+\frac{1}{7+\frac{1}{15}}$

2) أعط قيمة تقريبيّة برقمين بعد الفاصل لهذا العدد. فيما تذكّرك هذه النتيجة

7 نعتبر العددين $A=\frac{1}{2}\times\frac{3}{4}\times\frac{5}{6}\times\frac{7}{8}\times\frac{9}{10}\times\frac{11}{12}$ و $B=\frac{2}{3}\times\frac{4}{5}\times\frac{6}{7}\times\frac{8}{9}\times\frac{10}{11}\times\frac{12}{13}$

أحسب $A\times B$

8 $\frac{a}{b}$ و $\frac{c}{d}$ كتابتان للعدد $\frac{-2}{3}$ حيث $b\neq -3$ و $d\neq -3$ و $b+d\neq -3$

بيّن أنّ $\frac{a-2}{b+3}=-\frac{2}{3}$ و $\frac{c-2}{d+3}=-\frac{2}{3}$ و $\frac{a+c-2}{b+d+3}=-\frac{2}{3}$

9 a و b و c و d أعداد صحيحة نسبيّة مخالفة للصّفر حيث $b+d$ و $b-d$ مخالفان للصّفر و $a\times d=b\times c$

بيّن أنّ أ) $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$ ، ب) $\frac{a}{b}=\frac{a+c}{b+d}$ ، ج) $\frac{a}{b}=\frac{a-c}{b-d}$

10 لرجل أربعة أبناء : بنتين فاطمة وعائشة وولدين توأمين أحمد ومحمّد

وزّع عليهم بمناسبة أحد الأعياد مبلغا ماليّا كما يلي :

أعطى ثلث المبلغ لفاطمة وأعطى لعائشة ثلاثة أخماس المبلغ المتبقّي واقتسم التوأمان أحمد ومحمد الباقي بالتساوي.

1) ما هو العدد الكسريّ من بين الأعداد التّالية الّذي يعبّر عن مناب أحد التوأمين

$A=\frac{(1-\frac{1}{3}-\frac{3}{5})}{2}$ ؛ $B=(\frac{2}{3}-\frac{3}{5}\times\frac{2}{3})\times 2$ ؛ $C=(1-\frac{1}{3}-\frac{3}{5}\times\frac{2}{3})\times\frac{1}{2}$ ؟

2) أحسب مناب كلّ واحد علما أنّ المبلغ الجمليّ الّذي وقع توزيعه هو 90 دينارا.

القوى في مجموعة الأعداد الكسريّة النسبيّة

I القوى في مجموعة الأعداد الكسرية النسبية

II خاصيات القوى

القوى في مجموعة الأعداد الكسرية النسبية $\mathbb{Q}$

استحضـــر

1 1) مثلّث متقايس الأضلاع يساوي طول ضلعه 3 cm. اعط كتابة لمحيطه على صورة قوة.

2) مربّع طول ضلعه يساوي 8 cm

اعط كتابة لمحيطه وكتابة لمساحته على صورة قوة للعدد 2.

2 طول حرف مكّعب يساوي 16 cm أعط كتابة لمساحته الجانبية وكتابة لحجمه على صورة قوة للعدد 4.

3 ما هو الجواب الصحيح من بين المقترحات المقدمة أسفله.

نصف 2^{20} هو : 2^{10} ؛ 1^{20} ؛ 1^{10} ؛ 2^{19}

التخمين هو استنتاج منطقي لنتيجة أو قاعدة أو خاصيّة دون البرهنة عليها ..

4 1) أحسب

0^2-1^2 ؛ 1^2-2^2 ؛ 2^2-3^2 ؛ 3^2-4^2 ؛ 4^2-5^2 ؛ 10^2-11^2.

2) ما تخمينك بالنسبة للعدد : 145^2-146^2.

تحقق من صحة تخمينك باستعمال الآلة الحاسبة.

5 1-أ) فكك إلى جذاء عوامل أوّلية العددين a و b : حيث $a=648$ و $b=675$

ب)استنتج تفكيكا لـ : ق.م.أ (a,b) وم.م.أ (a,b).

نسمّي مربّعا كاملا لكلّ عدد يُكتب في صيغة مربّع لعدد كسري

2) حقق أن :

أ) العدد $\frac{a}{2}$ والعدد $3\times b$ مربعان كاملان.

ب) $a\times b$ = م.م.أ (a,b) × ق.م.أ (a,b)

أستكشف وأطبّق :

I. القوى في مجموعة الأعداد الكسرية النسبية

نشاط 1

أحسب $a=(-4)\times(-4)\times(-4)$ و $b=(-1,5)\times(-1,5)$

و $c=(-\frac{2}{3})\times(-\frac{2}{3})\times(-\frac{2}{3})\times(-\frac{2}{3})\times(-\frac{2}{3})$

العدد a هو جذاء لثلاثة اعداد مساوية للعدد (-4)

نعبر عن ذلك بالكتابة التالية $a=(-4)^3$

كذلك نكتب $b=(-1,5)\times(-1,5)=(-1,5)^2$

و $c=(-\frac{2}{3})\times(-\frac{2}{3})\times(-\frac{2}{3})\times(-\frac{2}{3})\times(-\frac{2}{3})=(-\frac{2}{3})^5$

ليكن x عددا كسريا نسبيا

x^2 يقرأ " x قوة إثنان " أو " x مربع

x^3 يقرأ " x قوة ثلاثة " أو " x مكعب"

إذا كان x عددا كسريّا نسبيّا و n عددا صحيحا طبيعيّا أكبر من 1 فإنّ الكتابة x^n ترمز لجذاء n أعداد مساوية للعدد x

$x^n=x\times x\times x\times\ldots\times x$ (جذاء n أعداد مساوية لـ x)

الكتابة x^n تسمّى قوّة للعدد x

العدد n يسمّى دليل هذه القوّة

* $x^1=x$

* إذا كان x عددا مخالفا لصفر فإنّ $x^0=1$

أطبّق :

1 أحسب $(-4)^3$ ؛ $(-7,5)^2$ ؛ $(\frac{3}{2})^5$ ؛ $(-\frac{5}{4})^4$

1^{15} ؛ $(-1)^{27}$ ؛ $(-1)^{50}$ ؛ $(\frac{-2547}{78965})^0$.

2 أحسب $\frac{7^3}{(-2)^5}$ ؛ $\frac{3^4}{5^2}\times(-\frac{1}{2})^3$ ؛ $\frac{(-5)^4}{10^3}$

نشاط 2 حساب قوى باستعمال الآلة الحاسبة

1)أ) أحسب 2^7

ب) باستعمال الآلة الحاسبة اتبع المراحل الأربعة التالية :

المرحلة الأولى	المرحلة الثانية	المرحلة الثالثة	المرحلة الرابعة
أدخل العدد2	اضغط على الزّر y^x أو x^y	أدخل العدد7	اضغط على الزّر =

ج) قارن العدد المسجل بشاشة الحاسبة ونتيجة السؤال أ.

2) أحسب باستعمال الآلة الحاسبة.

12^5 ؛ $(-29)^6$ ؛ $(149)^3$ ؛ 79^2 ؛ $(-537)^2$

$(-3{,}5)^{11}$ ؛ $\frac{5^6}{2^{17}}$ ؛ $(4{,}15)^{19}$ ؛ $\frac{2^{21}}{(-5)^9}$

ملاحظة : في بعض الآلات الحاسبة نجد الزرّ EE أو x^2

أطبّق :

1)أ) ماهو رقم آحاد كل عدد من الأعداد التالية :

6 ؛ 6^2 ؛ 6^3 ؛ 6^4 ؛ 6^5

ب) ما يكون رقم آحاد العدد 6^{2157} ؟

2)أ) ماهو رقم آحاد كل عدد من الأعداد التالية :

4 ؛ 4^2 ؛ 4^3 ؛ 4^4 ؛ 4^5 ؛ 4^6

ب) ما يكون رقم آحاد العدد 4^{75} ورقم آحاد العدد 4^{312} ؟

لحساب مربّع عدد بواسطة الحاسبة يمكن استعمال الزرّ x^2

3)أ) أحسب باستعمال الآلة الحاسبة 759^2 .

ب) باستعمال الآلة الحاسبة اتبع المراحل الثّلاثة التالية :

المرحلة الأولى	المرحلة الثانية	المرحلة الثالثة
أدخل العدد 759	اضغط على الزر x^2	اضغط على الزر =

قارن العدد المسجل بشاشة الحاسبة ونتيجة السؤال أ.

نسمّى مربّعا كاملا كلّ عدد تمكن كتابته على صورة مربّع لعدد كسري

نشاط 3 المربعات الكاملة

أكتب كلّ عدد من الأعداد التّالية في صورة مربّع لعدد كسريّ.

25 ؛ 100 ؛ $\frac{49}{81}$ ؛ $\frac{121}{64}$ ؛

$6{,}25$ ؛ $0{,}25$ ؛ 400 ؛ 2500

كل عدد من الأعداد السّابقة يسمى مربّعا كاملا.

أطبّق :

1 1) ما هي المربّعات الكاملة من بين الأعداد التّالية

9 ؛ 15 ؛ 16 ؛ 40 ؛ 49 ؛ $\frac{4}{25}$

2) إعط خمس مربعات كاملة أقلّ من 1

3) أذكر كل الأعداد الصحيحة الطبيعية الّتي مربّعها أقلّ من 100.

2 حقّق أنّ كلّ مجموع من المجاميع التّالية هو مربّع كامل.

1^3+2^3 ، $1^3+2^3+3^3$ ، $1^3+2^3+3^3+4^3$ ، $1^3+2^3+3^3+4^3+5^3$

تمرين مرفق بحل

1) أحسب كل مجموع من المجاميع التالية.

$1+3$ ؛ $1+3+5$ ؛ $1+3+5+7$ ؛ $1+3+5+7+9$ ؛ $1+3+5+7+9+11$. ماذا تلاحظ ؟

2) ماهو تخمينك بالنّسبة للمجموعين التاليين ؟

$1+3+5+...+97+99$ ؛ $1+3+5+...+1997+1999$

الحلّ

1) $1+3=4=2^2$

$1+3+5=9=3^2$

$1+3+5+7=16=4^2$ ؛ $1+3+5+7+9=25=5^2$ ؛ $1+3+5+7+9+11=36=6^2$

بتأمل المجاميع السّابقة يمكن ملاحظة أنها مربّعات كاملة.

2) يمكننا كتابة المجاميع السّابقة كالتّالي :

$$1+3=4=2^2=\left(\frac{3+1}{2}\right)^2$$

$$1+3+5=9=3^2=\left(\frac{5+1}{2}\right)^2$$

$$1+3+5+7=16=4^2=\left(\frac{7+1}{2}\right)^2$$

أنقل وأتمم $1+3+5+7+9=25=5^2=$ ..... ؛ $1+3+5+7+9+11=36=6^2=$ .....

$1+3+5+7+9+11+13+15+17+19+21=$..... .

منطقيا واعتمادا على ما سبق يمكننا تخمين ما يلي :

$$1+3+5+...+97+99=\left(\frac{99+1}{2}\right)^2=50^2=2500$$

ما هو تخمينك بالنسبة للمجموع

$1+3+5+...+1997+1999$ ؟

نشاط 4 الجذر التربيعي لمربع كامل

باستعمال الآلة الحاسبة اتبع المراحل الثلاثة التالية :

المرحلة الأولى	المرحلة الثانية	المرحلة الثالثة
أدخل العدد 1444	اضغط على الزر $\sqrt{\ }$	اضغط على الزر $=$

أحسب مربّع العدد المتحصّل عليه. ماذا تلاحظ ؟

$38^2 = 1444$ نقول أن :

العدد 38 هو الجذر التربيعي للعدد 1444 أو أنّ الجذر التربيعي للعدد 1444 هو العدد 38

ونرمز لذلك بالكتابة التّالية $\sqrt{1444} = 38$

$\sqrt{25} = 5$ (نقرأ : الجذر التربيعي لـ 25 يساوي 5).

$\sqrt{169} = 13$ يعني $13^2 = 169$

$\sqrt{42,25} = 6,5$ **يعني** $(6,5)^2 = 42,25$

إذا كان عدد a مربعا كاملا فإن الجذر التربيعي له هو العدد الموجب الّذي يكون مربعه مساويا للعدد a ونرمز له بـ $\sqrt{a}$

أطبّق :

1 أ) ماهو الجذر التربيعي لكل عدد من الأعداد التالية :

1 ؛ 4 ؛ 9 ؛ 16 ؛ 36 ؛ 49 ؛ 64 ؛ 81 ؛ 400 ؛ 10000

ب) احسب : $\sqrt{\frac{81}{16}}$ ؛ $\sqrt{\frac{9}{64}}$ ؛ $\sqrt{\frac{400}{81}}$ ؛ $\sqrt{\frac{169}{49}}$.

ج) حدد باستعمال الآلة الحاسبة :

$\sqrt{1024}$ ؛ $\sqrt{6241}$ ؛ $\sqrt{9025}$ ؛ $\sqrt{204304}$ ؛ $\sqrt{3200521}$

$\sqrt{12,25}$ ؛ $\sqrt{54,76}$ ؛ $\sqrt{109,2025}$

2 أ) أحسب : $\sqrt{121}$ ؛ $\sqrt{12321}$ ؛ $\sqrt{1234321}$ ؛ $\sqrt{123454321}$

ب) ما يكون الجذر التربيعي لكل عدد من الأعداد التّالية : 12345654321 ؛ 1234567654321 ؛ 123456787654321 ؛ 12345678987654321 ؟

تمرين مرفق بحلّ

1) أحسب في كل حالة من الحالات التالية العدد $A \times B + 1$ وحقق أنه مربع كامل.

أ) $\begin{cases} A = 11 \\ B = 105 \end{cases}$ ب) $\begin{cases} A = 111 \\ B = 1005 \end{cases}$ ج) $\begin{cases} A = 1111 \\ B = 10005 \end{cases}$

2) ماهو الجذر التربيعي للعدد 111111555556

الحلّ

1-أ) $A\times B+1=11\times105+1=1156$

باستعمال الحاسبة

المرحلة الأولى	المرحلة الثانية	المرحلة الثالثة
أدخل العدد 1156	اضغط على الزر $\sqrt{\ }$	اضغط على الزر =

نقرأ على الشاشة 34

إذن $1156=34^2$

ب) $A\times B+1=111\times1005+1=111556=(334)^2$

ج) $A\times B+1=1111\times10005+1=11115556=(3334)^2$

2) لا يمكن استعمال الحاسبة للبحث عن الجذر التربيعي للعدد 111111555556 وذلك لأنّ عدد أرقامه يفوق العشرة ولكن بالإستئناس بما سبق يمكن استنتاج الجذر التربيعي لهذا العدد وهو 333334 أي أن $(333334)^2=111111555556$

نشاط 5 القوى السّالبة

1-أ) اعط الكتابة العشرية لمقلوب العدد 5^2

ب) باستعمال الآلة الحاسبة اتبع المراحل الأربعة التالية :

المرحلة الأولى	المرحلة الثانية	المرحلة الثالثة	المرحلة الرّابعة
أدخل العدد 5	اضغط على الزّر y^x أو x^y	اضغط على الزر -2	اضغط على الزر =

قارن العدد المسّجل بالشاشة ونتيجة السؤّال أ

إذا كان a عددا كسريّا نسبيّا مخالف للصّفر و n عدد صحيحا طبيعيا فإن الكتابة a^{-n} ترمز لمقلوب العدد a^n

$$a^{-n}=\frac{1}{a^n} \quad ; \quad a^{-1}=\frac{1}{a}$$

أطبّق :

أحسب : أ) $(-4)^{-2}$ ؛ 5^{-1} ؛ 10^{-3} ؛ $(-2)^{-3}$

ب) $(0,5)^{-2}$ ؛ $(\frac{2}{5})^{-3}$ ؛ $(-\frac{4}{3})^{-2}$

II.خاصيات القوى

خاصيات القوى في الجموعة Q هي امتداد لخاصيات القوى في IN

إذا كان a و b عددين كسريين نسبيين مخالفين لصفر و m و n عددين صحيحين نسبيين فإن

$$a^n \times a^m = a^{n+m} \quad ; \quad (a^n)^m = a^{n \times m} \quad ; \quad \frac{a^n}{a^m} = a^{n-m}$$

$$(a \times b)^n = a^n \times b^n \quad ; \quad (\frac{a}{b})^n = \frac{a^n}{b^n} \quad ;$$

أطبّق :

1 أكتب في صيغة قوة لعدد كسري نسبي

$$(-\frac{5}{2})^3 \times (-\frac{5}{2})^8 \quad ; \quad [(3,5)^7]^{-3} \quad ; \quad \frac{(-3)^{11}}{(-3)^7} \quad ; \quad \frac{(-8)^{12}}{(-8)^5}$$

$$[(10^{-5})]^4 \quad ; \quad \frac{10^4 \times [10^{-3}]^{-5}}{10^{-7} \times 10^2}$$

2 أنقل واكمل بما يناسب

$$(-7.25)^6 \times (-7.25)^{\cdots\cdots} = (-7.25)^{11} \quad ; \quad \frac{12^8}{12^{\cdots}} = 12^5$$

$$\left[(-\frac{5}{9})^{\cdots}\right]^{-7} = (-\frac{5}{9})^{-21} \quad ; \quad \frac{(-9)^7}{(-9)^{\cdots}} = (-9)^{11}$$

نشاط 1 قوى العدد 10

انقل وأتمم تعمير الجدول التّالي :

العدد على صورة قوّة لـ 10	10^{12}		10^4	10^3		10^1	10^0	10^{-1}	10^{-2}			10^{-9}
الكتابة العشرية للعدد		10000000			100		1			0.001	0.00001	

أطبّق :

1 أعط الكتابة العشرية لكل عدد من الأعداد التالية :

$2{,}35\times10^2$ ؛ 789×10^{-4} ؛ $0{,}0362\times10^7$ ؛ $1{,}78\times10^{-5}$ ؛ $97{,}645\times10^{12}$

2 أ) أحسب

$\frac{10^1-1}{9}$ ؛ $\frac{10^2-1}{9}$ ؛ $\frac{10^3-1}{9}$ ؛ $\frac{10^4-1}{9}$ ؛ $\frac{10^{10}-1}{9}$.

3 اختزل إلى أقصى حد

$\frac{10^2-1}{33}$ ؛ $\frac{10^3-1}{444}$ ؛ $\frac{10^4-1}{5555}$ ؛ $\frac{10^5-1}{66666}$ ؛ $\frac{10^7-1}{8888888}$

4 1) نريد مقارنة العددين $2{,}35\times10^5$ و 948×10^2

أ) حقّق أنّ $2{,}35\times10^5 = 2350\times10^2$ وأن $948\times10^2 = 0{,}948\times10^5$

ب) قارن إذن العددين $2{,}35\times10^5$ و 948×10^2

2- أ) أنقل وأتمم بما يناسب : $2{,}83\times10^{-4} = 2830\times10^{\cdots\cdots}$ ؛ $2920\times10^{-7} = \ldots\ldots\times10^{-4}$

ب) قارن العددين $2{,}83\times10^{-4}$ و 2920×10^{-7}

5 رتّب تصاعديا الأعداد التّالية :

$5{,}2\times10^3$ ؛ $3{,}685\times10^{-2}$ ؛ 5199 ؛ 31×10^{-3} ؛ $3{,}25\times10^{-2}$

نشاط 2 الكتابة العلمية لعدد عشري

1) حقّق أنّ $0,00243 = 0,0243\times10^{-1} = 0,243\times10^{-2} = 2,43\times10^{-3} = 243\times10^{-5}$

كلّ هذه الكتابات هي كتابات على صورة $a\times10^{n}$ للعدد العشري $0,00243$

في أيّ كتابة منها يستجيب العدد a للشرطين التّاليين :

- له رقم واحد قبل الفاصل
- وهذا الرقم لا يساوي 0 ؟

هذه الكتابة تسمى الكتابة العلميّة للعدد العشري $0,00243$

2) باستعمال الآلة الحاسبة أحسب

أ) 40000×9000000 ؛ ب) $0,00006\times0,000002$ ؛ ج) $0,000056:68457932$ ماذا تلاحظ ؟

الكتابة العلميّة لعدد عشري هي كتابته على صورة $a\times10^{n}$ حيث n عدد صحيح و a عدد عشري ذو رقم واحد قبل الفاصل وهذا الرّقم مخالف للرّقم 0.

أطبّق :

1 أعط الكتابات العلميّة للأعداد التّالية :

$65487,456$ ؛ $165,42\times10^{5}$ ؛ سبعة عشر مليارا ؛ مائة وخمسة وثلاثون مليونا.

2 نعتبر الأعداد التّالية :

$0,235\times10^{-7}$ ؛ $7,49512\times10^{-11}$ ؛ $1,75\times10^{4}$ ؛ $0,75\times10^{6}$ ؛ $9,03\times10^{6}$ ؛ $4,23\times2^{11}$

أ) أي هذه الأعداد مكتوب كتابة علميّة ؟

ب) اعط قيمة تقديريّة لكلّ عدد من الأعداد السّابقة

3 احسب و اكتب النّتيجة على صورة كتابة علميّة

$0,532+235\times10^{-3}$ ؛ $0,235\times10^{4}\times10^{-6}+4\times10^{-2}$ ؛ $10^{-2}+10^{-1}+10^{0}+10^{2}$ ؛

$$\frac{270\times10^{2}\times2,5\times10^{-5}}{7,5\times10^{7}\times10^{5}}$$

4 تنجز الكرة الأرضية دورة كاملة حول الشّمس في 365 يوما و6 ساعات. أعط كتابة علمية لهذه المدة بالثواني.

5 تقدّر كتلة الكرة الأرضيّة بـ 5980 مليار المليار طن. أعط كتابة علميّة لكتلتها بالكيلوغرام ثمّ أعط قيمة تقديرية لهذه الكتلة.

نشاط 3 جبر عدد

انقل وأتمم تعمير الجدول التّالي

العدد	جبره برقمين بعد الفاصل	جبره برقم بعد الفاصل	جبره بالمئات	جبره بالعشرات
263,8179	263,82	263,8	300	260
2546,871	……..…	……..…	……..…	……..…
754,3728	……..…	……..…	……..…	……..…
164,191	……..…	……..…	……..…	……..…

أحوصـل

* إذا كان x عددا كسريّا نسبيّا و n عددا صحيحا طبيعيّا أكبر من 1 فإنّ الكتابة x^n ترمز لجذاء n أعداد مساوية للعدد x

$x^n = x \times x \times x \times ... \times x$ (جذاء n أعداد مساوية لـ x)

الكتابة x^n تسمّى قوّة للعدد x

العدد n يسمّى دليل هذه القوّة

$x^1 = x$

إذا كان x عددا مخالفا لصفر فإنّ $x^0 = 1$

* إذا كان عدد a مربّعا كاملا فإنّ الجذر التربيعي له هو العدد الموجب الّذي يكون مربّعه مساويا للعدد a ونرمز له بـ $\sqrt{a}$

* إذا كان a عددا كسريّا نسبيّا مخالف للصفر و n عددا صحيحا طبيعيّا فإنّ الكتابة a^{-n} ترمز لمقلوب العدد a^n $\quad a^{-n} = \frac{1}{a^n}$ ؛ $a^{-1} = \frac{1}{a}$

* إذا كان a و b عددين كسريين نسبيّين مخالفين لصفر و m و n عددين صحيحين نسبيّين فإنّ :

$$a^n \times a^m = a^{n+m} \quad ; \quad (a^n)^m = a^{n \times m} \quad ; \quad \frac{a^n}{a^m} = a^{n-m}$$

$$(a \times b)^n = a^n \times b^n \quad ; \quad \left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$$

* الكتابة العلميّة لعدد عشريّ هي كتابته على صورة $a \times 10^n$ حيث n عدد صحيح نسبي و a عدد عشريّ ذو رقم واحد قبل الفاصل وهذا الرقم مخالف للرّقم 0

تمـــارين

1 أكتب كلّ مجموع من المجاميع التّالية على صورة قوّة لعدد صحيح طبيعي دليلها 3

2^2+2^2 ؛ $3^2+3^2+3^2$ ؛ $4^2+4^2+4^2+4^2$.

2 1) أكتب كلّ مجموع من المجاميع التّالية على صورة قوّة

$4+2^2$ ؛ $4+2^2+2^3$ ؛ $4+2^2+2^3+2^4$ ؛ $4+2^2+2^3+2^4+2^5$

2) ما هو تخمينك بالنسبة لـ :

$4+2^2+2^3+...+2^{75}$ ؛ $4+2^2+2^3+...2^n$ حيث n عدد صحيح طبيعي أكبر من 3

3 احسب $(-5)^3$ ؛ $(11)^2$ ؛ $(-3)^4$ ؛ $(-3)^2\times(-3)^4$ ؛ $(-7)^3$ ؛ $(121)^2$

4 احسب $(-\frac{5}{4})^3$ ؛ $(2,1)^2$ ؛ $(\frac{-3}{5})^4$ ؛ $(-3,5)^2\times(-\frac{3}{2})^4$

5 أكتب على صورة a^n حيث a صحيح نسبيّ و n عدد صحيح طبيعيّ.

$(-2)^7\times(-2)^5\times(-2)^{11}$ ؛ $(-7)^6\times(-7)^{12}\times49^5$ ؛ $(-3)^2\times(-3)^4$ ؛ $3^8\times(-2)^8$ ؛

$10^{14}\times(-5)^{14}$ ؛ $9^{11}\times3^9$ ؛ $16^5\times(-4)^3$ ؛ $6^{17}\times2^{17}\times3^{17}$ ؛

$\left[(-4)^3\right]^7\times(-64)$

6 أحسب بأيسر طريقة

$A=(-2)^5\times13\times5^5$ ؛ $B=2^4\times(-5)^5\times(-20)$ ؛ $C=4^2\times(-12,25)\times5^4$ ؛

$D=(-2)^7\times2013^0\times(-5)^7$

7 أكتب على صورة a^n حيث a عدد كسري نسبي و n عدد صحيح نسبي

$(-2)^7\times(-2)^{-5}\times(-2)^{11}$ ؛ $\frac{(-7)^6\times(-7)^{-12}}{(-7)^{-10}}$ ؛ $10^{-14}\times(-5)^{-14}$ ؛

$\frac{25^{11}}{(-5)^9}$ ؛ $\frac{16^5}{4^{-3}}$ ؛ $\frac{(-21)^{11}}{7^{11}}$ ؛ $\frac{(-\frac{11}{5})^{-6}}{22^{-6}}$ ؛ $(-\frac{2}{3})^{14}\times(-\frac{2}{3})^{-7}$ ؛

$\frac{(\frac{5}{4})^{-11}}{(\frac{5}{4})^{23}}$ ؛ $\frac{10^{17}\times 2^{17}}{3^{17}}$ ؛ $\left[(-\frac{4}{5})^{3}\right]^{7}\times(-\frac{64}{125})$ ؛ $\frac{(-\frac{6}{7})^{5}}{(\frac{2}{3})^{5}}$

8 اختصر إلى أقصى حدّ العبارات التالية حيث x و y عددان كسريان نسبيان مخالفان للصفر

$\frac{3x^4\times(-5y^7)}{2x^3\times 3y^2}$ ؛ $\frac{\left[(-4x^3)^6\right]\times y^4}{\left[8y^2\right]^6\times x^7}$ ، $3x^4\times(-5y^7)\times 2x^{-3}\times 3y^{-2}$ ؛

$(-4x^{-3})^2\times y^2\times\left(2y^2\right)^{-3}\times x^7$

9 a و b عددان كسريان حيث $ab^2=2$. أحسب $A=\frac{3a^3b^6}{ab^2}$ و $B=\frac{2(5a^2)^3b^{12}}{(5ab^2)^3}$

10 أثبت أن رقم آحاد عدد صحيح مربّع كامل هو 0 أو 1 أو 4 أو 5 أو 6 أو 9

11 ما هو رقم آحاد 3^4 . استنتج رقم آحاد 3^{1000} .

12 أحسب $\sqrt{144}$ ؛ $\sqrt{361}$ ؛ $\sqrt{1369}$ ؛ $\sqrt{5^8}$ ؛ $\sqrt{10^{12}}$ ؛ $\sqrt{55225}$

$\sqrt{\frac{25}{81}}$ ؛ $\sqrt{\frac{625}{169}}$ ؛ $\sqrt{132,25}$ ؛ $\sqrt{870,25}$

13 أحسب $\sqrt{11+5^2}$ ؛ $\sqrt{1111+45^2}$ ؛ $\sqrt{111111+445^2}$ ؛ $\sqrt{11111111+4445^2}$

ما تخمينك بالنّسبة لـ $\sqrt{111111111111+444445^2}$ ؟

14 أحسب 3^2+2 ؛ 33^2+22 ؛ 333^2+222 ؛ 3333^2+2222 ؛

ما تخمينك بالنسبة لـ $3333333^2+2222222$ ؟

15 يقدّر عدد سكان الكرة الأرضية بـ5,8 مليار نسمة. يستهلك كلّ ساكن لتران من الماء يوميا. عبّر بكتابة علمية وبالمتر المكعّب عن الاستهلاك اليومي لكافة السكان ثم أعط قيمة تقديريّة لهذا الاستهلاك.

16 أعط الكتابة العلميّة وقيمة تقديريّة لكلّ عدد من الأعداد التّالية

$9452,457$ ؛ $12,457\times10^{17}$ ؛ $0,000954\times10^{-15}$ ؛ 2456^{5} ؛ $(0,048)^{7}$

17 إذا كان 4,5 لتر من دم الإنسان تحتوي على $2,025\times10^{13}$ من الكويرات الحمر فما هو عدد الكويرات المحتواة في لتر واحد.

18 تبعد المجرة المسماة "مجرة $M.87$ " عن الأرض بـ 50 مليون سنة ضوئية.

1) السنة الضوئية هي المسافة التي يقطعها الضوء في سنة بسرعة $3\times10^{5}\,km/s$

أعط قيمة تقديرية بالكيلومتر للسّنة الضوئية. (باعتبار السنة 365 يوما و6 ساعات)

2) عبّر بكتابة علمية وبحساب الكيلومتر عن بعد هذه المجرة عن الأرض.

3) تقدر كتلة "مجرة $M.87$ " بملياري مرة كتلة الشمس. أحسب هذه الكتلة علما أنّ كتلة الشّمس تقدر بـ $2\times10^{13}\,kg$.

19 أ) حدّد من بين الكتابات التّالية ما هي الّتي تمثّل كتابة علميّة لعدد عشري

أ) 457×10^{-9}	-6.023×10^{-27}
ب) $6,67\times10^{18}$	$0,981\times10^{-3}$
ج) $-63,657\times10^{17}$	$4,012\times10^{-9}$
د) $10,31\times10^{12}$	

ب) جد الكتابة العشريّة لكلّ من الأعداد التّالية :

$8,3\times10^{5}$ ، $-4,5\times10^{3}$ ، $-9,81\times10^{-5}$ ، $4,513\times10^{8}$ ، $4,513\times10^{-4}$

ج) جد الكتابة العلميّة لكلّ من الأعداد التّالية : أتمم الجدول التالي

$540\,000\,000\,000$ ، $-650\,000\,000$ ، $0,000\,000\,006$ ، $-0,000\,002\,64$

20 أحسب ثمّ أعط الكتابة العشريّة

$A=3\times10^{-4}\times7\times10^{6}\times1,25$ ، $B=7,5\times(-10)^{9}\times2\times10^{-14}$ ،

$C=153\times10^{-4}+32\times10^{-3}-16\times10^{-5}$ ، $D=\dfrac{3\times10^{2}\times1,2\times10^{-5}}{10^{10}\times10^{2}}$

المعادلات من الدّرجة الأولى ذات مجهول واحد

I المعادلات من الدّرجة الأولى ذات مجهول واحد

II معادلات يؤول حلها إلى حل معادلات من الدرجة الأولى ذات مجهول واحد

III مسائل يؤول حلها إلى حل معادلات من الدرجة الأولى ذات مجهول واحد

المعادلات من الدّرجة الأولى ذات مجهول واحد

أستحضـــر :

1

احتفلت تونس سنة 2006 بمرور 600 سنة على وفات العلامة عبد الرحمان ابن خلدون. في أيّ سنة ولد هذا العلامة إذا علمت أنه عاش 74 سنة ؟

2

أكمل في كلّ مرة النقاط بما يناسب

$\frac{1}{5}+\ldots=\frac{3}{5}$; $\frac{2}{\ldots}=\frac{3}{5}$; $\frac{\ldots}{5}=-2$; $7\times\ldots=4$

3

x و y عددان كسريان نسبيان بحيث $2x=3y$

قارن العبارات التالية معللا جوابك

أ) $2x+\frac{1}{2}$ و $3y+\frac{1}{2}$ ب) $2x-\frac{5}{9}$ و $3y-\frac{5}{9}$

ج) $-18x$ و $-27y$ د) $\frac{2}{5}x-\frac{1}{3}$ و $\frac{3}{5}y-\frac{1}{3}$

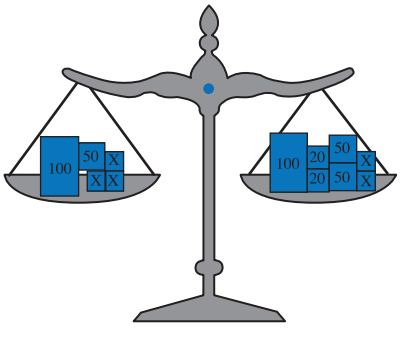
4

انطلق درّاج على السّاعة 9h30mn من مدينة غارالدّماء للوصول إلى مدينة باجة. تقدّر هذه المسافة بـ 84km . توقّف الدرّاج بمدينة جندوبة للرّاحة لمدّة 15 دقيقة. متى وصل إلى مدينة باجة إذا كان معدّل سرعته 32km/h ؟

أستكشـــف وأطبق :

I. المعادلات من الدّرجة الأولى ذات مجهول واحد

نشاط 1 تمثل الصورة المقابلة كفّتي ميزان متوازيتين



1. عبر بدلالة x عن هذا التوازن
2. أنقصنا من كل كفة 2x غراما , هل يختل التوازن ؟ عبّر عن ذلك بمساواة
3. أنقصنا بعد ذلك من كلّ كفّة 150 غراما ,

هل يختل التوازن ؟

عبّر عن ذلك بمساواة أخرى

4. ما هي قيمة x ؟

نشاط 2 نريد التعرف إلى بعدي مستطيل نصف محيطه 61 مترا

و يزيد طوله عن عرضه بـ11 مترا نرمز بـ a لعرض هذا المستطيل

1) عبر بدلالة a عن نصف محيط المستطيل

2) عبر بمساواة على المعطى التالي « نصف محيط المستطيل يساوي 61 مترا »

3) هل يمكن أن يكون العرض 15 مترا؟ 30 مترا ؟ 100 مترا ؟

4) ما هما بعدا المستطيل ؟

5) تحقّق من مطابقة هذين البعدين مع المعطيات

نشاط 3 نعتبر المثلث ABC حيث $AB=2x+1$ و $AC=7x-19$ و $BC=4x+12$ و x عدد كسري حيث $6 \prec x \prec 32$.

1) أ) ما هي طبيعة المثلث ABC إذا كانت $7x-19=2x+1$ ؟

ب) بين أنّ $7x-19=2x+1$ يعني $5x=20$

ج) استنتج إذا أبعاد المثلث في هذه الحالة

2)أ) ابحث عن العدد x ليكون المثلث ABC متقايس الضلعين قمته الرئيسية C

ب) هل يمكن أن يتقايس الضلعان [AB] و [BC] ؟

3) ما هي أبعاد هذا المثلث إذا علمت أنّ محيطه يساوي 114cm؟

في الأنشطة السابقة تعرضنا لكتابات من نوع

$13x=130$; $7x-19=2x+1$; $7x-19=4x+12$; $2\ell+11=61$; $2\ell=50$

وهي كتابات كلّها تؤول إلى صيغة من نوع $ax=b$ أو $a\ell=b$ حيث a و b عددان كسريان معلومان و a مخالف للصفر .

كل كتابة من هذه الكتابات تسمّى معادلة من الدرجة الأولى ذات مجهول واحد.

في المعادلة $ax=b$:

x يسمى المجهول

ax يسمى الطرف الأول للمعادلة

b يسمى الطرف الثاني للمعادلة

1 حلّ هذه المعادلة يتمثل في البحث عن العدد المجهول x الذي يحقق المساواة $ax=b$

2 أ) حوّل المساواة $\frac{x+1}{2} = 4x - 1$ إلى مساواة من نوع $ax=b$

ب) حلّ في Q المعادلة $\frac{x+1}{2} = 4x - 1$

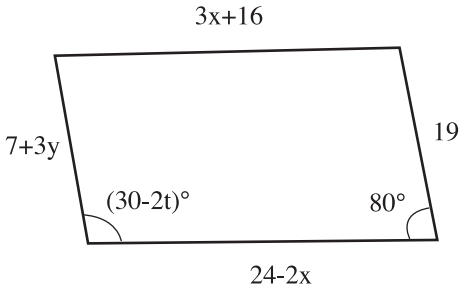
نعتبر المعادلة $3t+1+\frac{t-1}{4} = \frac{2t+3}{2}$

3 أ) حوّل كتابة هذه المعادلة إلى كتابة من نوع $at=b$.

ب) حلّ في Q هذه المعادلة .

نعتبر متوازي الأضلاع المقابل

ابحث عن أقيسة أضلاعه وزواياه

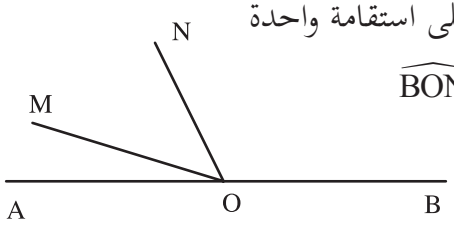


تمرين مرفق بحل 1

في الشكل التالي لدينا A و O و B على استقامة واحدة

و $\widehat{MON} = 2\widehat{AOM}$ و $\widehat{BON} = 3\widehat{MON}$

ابحث عن $\widehat{BON} = \widehat{MON} = \widehat{AOM}$



الحلّ

نرمز بـ x لقيس الزاوية $\widehat{AOM}$

نترجم المعطيات كما يلي $\widehat{MON}=2\widehat{AOM}$ يعني $\widehat{MON}=2x$

و $\widehat{BON}=3\widehat{MON}$ يعني $\widehat{BON}=3(2x)=6x$

بما أنّ A و O وB على استقامة واحدة فإنّ $\widehat{AOM}+\widehat{MON}+\widehat{BON}=180°$

يعني $x+2x+6x=180$

يعني $9x=180$

يعني $x=\frac{180}{9} = 20°$

إذا فإن أقيسة الزوايا هي كالتالي $\widehat{AOM}=20°$ و $\widehat{MON}=40°$ و $\widehat{BON} = 120°$

يمكننا التثبت من مطابقة ما توصلنا إليه مع المعطيات $\widehat{MON}=40°=2\widehat{AON}$ $\widehat{BON}=120°=3\widehat{MON}$

تمرين مرفق بحل 2

حوض على شكل متوازي مستطيلات قاعدته مستطيل بعداه بالصنتمتر 30 و 40 .

وضعنا فيه 18 لترا من الماء

ما هو ارتفاع الماء في هذا الحوض ؟

الحلّ

نرمز إلى ارتفاع الماء بـ h

حجم الماء هو :

$V=48\times 30\times h$

$V = 1440h\ cm^3$

وبما أنّ حجم الماء هو 18 لترا أي $18000cm^3$

إذا لدينا $1440h = 18000$

وبالتالي فإن ارتفاع الماء في الحوض يساوي $h = \frac{18000}{1440} = 12.5cm$

تمرين مرفق بحل 3

في جيبي 270 دينارا متكونة من أوراق نقدية من فئة 5 دنانير و 10 دنانير و 20 دينارا .

عدد الأوراق من فئة 10 دنانير هو ثلاثة أضعاف عدد الأوراق من فئة 5 دنانير

ما هو عدد الأوراق من كل فئة ؟

الحلّ

نرمز بـ x لعدد الأوراق النقدية من فئة العشرين دينارا

عدد الأوراق من فئة 5 دنانير هو إذا $x+3$ و عدد الأوراق من فئة العشرة دنانير هو $3(x+3)$

إذا لدينا $20x + 5(x+3) + 10\times 3(x+3) = 270$

بعد النشر والاختزال نتوصل إلى المعادلة التالية : $55x + 105 = 270$

يعني $55x = 270 - 105 = 165$ يعني $x = 3$

وبالتالي فبجيبي 3 أوراق من فئة 20 دينارا و 18 ورقة من فئة 10 دنانير و 6 أوراق من فئة 5 دنانير.

علينا الآن التأكد من مطابقة ما توصلنا إليه مع المعطيات

3 أوراق من فئة 20 دينارا تُعطي مبلغا يساوي 60 دينارا

18ورقة من فئة 10 دنانير تُعطي مبلغا يساوي180 دينارا

6 أوراق من فئة 5 دنانير تُعطي مبلغا يساوي 30 دينارا

وبذلك فإن المبلغ الجملي هو 60+180+30=270

نشاط 4 لحل التمرين السابق توخينا عدّة مراحل وهي:

حل المعادلة – اختيار المجهول – التأكد من مطابقة الحل مع المعطيات – كتابة الوضعيّة في صيغة معادلة.

رتّب هذه المراحل .

II. معادلات يؤول حلها إلى حل معادلات من الدرجة الأولى ذات مجهول واحد

نشاط 1 حل في Q المعادلات التالية

أ- $(2x+3)(x-1)=0$ ب- $t(3t+5)=0$ ج- $(3x+\frac{1}{2})(\frac{5}{4}x-\frac{1}{3})=0$

د- $x^2-x=0$ ت- $(2x-5)(x-1)(1-2x)=0$ ك- $3x^2+5x=0$

نشاط 2 لتكن العبارة $A=(3x-2)(3x-2)+6x-4$

1) بين ان $A=(3x-2)(2x-3)$

2) حل في Q المعادلة $A=0$

أطبق :

أ) فكك العبارات التالية إلى جذاء عوامل:

$B=t(t+1)+2t+2$; $A=8x-2+(x-1)(4x-1)$;

$C=y^2-3y-(y-2)(y-3)$

ب) حلّ في Q المعادلات التالية A=0 ; B=0 ; C=0

نشاط 3 ما هو العدد الذي إذا طرحناه من بسط و مقام العدد الكسري $\frac{4}{5}$ نتحصّل على $\frac{5}{4}$ ؟

III . مسائل يؤول حلها إلى حل معادلات من الدرجة الأولى ذات مجهول واحد

مسألة 1 [مرفقة بحلّ]

دخل جمع من التلاميذ إلى قاعة عرض مجهزة بأرائك لو أجلسنا 5 تلاميذ على كل أريكة يبقى بهذه القاعة 12 مكانا شاغرا ولو أجلسنا 4 تلاميذ على كل أريكة، لا يجد 3 تلاميذ منهم مكانا للجلوس.

ما هو عدد التلاميذ ؟

الحلّ

نرمز لعدد الأرائك بـ x

لو أجلسنا 5 تلاميذ على كل أريكة ، يبقى بهذه القاعة 12 مكانا شاغرا، إذا فإنّ عدد التلاميذ هو $5x-12$

لو أجلسنا 4 تلاميذ على كل أريكة يبقى 3 تلاميذ بدون مقاعد إذا فإن عدد التلاميذ هو

$4x+3$

و بما ان عدد التلاميذ هو نفسه في الحالتين إذا لدينا $5x-12=4x+3$ يعني $x=15$

و بالتالي فبهذه القاعة 15 أريكة و عدد التلاميذ $5\times15-12$ أو $4\times15+3$ أي 63 تلميذا

مسألة 2

رجل عمره 62 سنة له ابن عمره 40 سنة و حفيد عمره 12 سنة

قال الرجل لابنه و حفيده : « قبل أن يبلغ سني 75 سنة سوف يصبح مجموع عمريكما مساويا لعمري »

هل هو محق فيما قال؟

مسألة 3

12 ورقة نقدية من فئتي 5 دنانير و 10 دنانير قيمتها الجملية 100 دينار.

ما هو عدد الأوراق من كل فئة ؟

مسألة 4

للاشتراك في الإنترنت تقدّم شخص إلى شركتين

عرضت عليه الأولى خدماتها كالتالي

- معلوم الاشتراك الشهري 6 دنانير
- 5 ساعات إبحار على الأنترنات مجانا ثم وبعد انقضاء الخمس ساعات , تفوتر الساعة بحساب دينارين لكل ساعة .

عرضت عليه الثانية خدماتها كالتالي :

- معلوم الإشتراك الشهري 18 دينارا
- يمكن له الإبحار كما يشاء (دون تحديد سقف لساعات الإبحار)

1 - ما هي الشركة الأنسب إذا كان معدل ساعات الإبحار شهريا هو7 ساعات؟

2 - ما هي الشركة الأنسب إذا كان معدل ساعات الإبحار شهريا هو15 ساعات؟

3 - ما هو عدد ساعات الإبحار على الإنترنت التي تكون فيها معاليم الإشتراك متساوية عند هاتين الشركتين ؟

مسألة 5 [مرفقة بحل]

قطع درّاج المسافة الفاصلة بين مدينتين ذهابا وإيابا بمعدل سرعة $30km/h$ في الذهاب و $20km/h$ في الإياب.

ما هو معدل سرعة هذا الدرّاج "ذهابا وإيابا"

الحل

نرمز بـ d للمسافة الفاصلة بين المدينتين و بـ v لمعدل السرعة "ذهابا و إيابا" الذي نبحث عنه.

- المسافة الجملية المقطوعة ذهابا وإيابا هي 2d

الوقت الذي قضاه هذا الدرّاج في الذهاب هو $\frac{d}{30}$

والوقت الذي قضاه في الإياب هو $\frac{d}{20}$

- إذا الوقت الذي قضاه"ذهابا وإيابا" هو من ناحية $\frac{2d}{v}$

و من ناحية أخرى فهو مجموع الوقت المقضي في الذهاب و الإياب أي $\frac{d}{30}+\frac{d}{20}$

- إذا $\frac{2d}{60}+\frac{3d}{60}=\frac{5d}{60}$ يعني $\frac{5d}{60}=\frac{2d}{v}$

وبالتالي فلدينا $\frac{5d}{2d}=\frac{60}{v}$ يعني $\frac{5}{2}=\frac{60}{v}$ يعني

(جذاء الوسطين يساوي جذاء الطرفين)أي $5v=120$ يعني $v=24km/h$

يعني $v=24km/h$ إذا معدل سرعة هذا الدرّاج "ذهابا وإيابا"هو $v=24km/h$

(و ليس كما يتبادر لذهن البعض هو $25km/h$)

مسألة 6

لاحظ الجدول التالي ثمّ ضع في كلّ خانة العدد المناسب إذا علمت أنّه بداية من الخانة الثالثة (من اليسار إلى اليمين) كلّ عدد هو مجموع العددين الموجودين بالخانتين السابقتين.

-44	…	…	…	…	…	…	1

مسألة 7

كُلّف فريق من عمّال البناء ببناء حائطين لهما نفس الإرتفاع و طول أحدهما ضعف طول الآخر.

اشتغل هؤلاء العمّال بنفس الطريقة و على نفس الوتيرة

في اليوم الأوّل اشتغل كلّ العمّال فأنجزوا جزءا من الحائط الكبير.

في اليوم الثاني نصف عدد العمّال أتمّ بناء الحائط الكبير فأكمله والنصف الآخر من العمّال أنجز بناء جزء من الحائط الصغير.

في اليوم الثالث والأخير اشتغل عاملان فقط فأتمّا بناء الحائط الصغير.

ما هو العدد الجملي للعمّال ؟

مسألة 8

لرجل عدد من البيضات.

أكل في اليوم الأول نصف عددها ونصف بيضة .

أكل في اليوم الثاني نصف ما تبقى ونصف بيضة،

ثم أكل في اليوم الثالث نصف ما تبقى ونصف بيضة ولم يبق له بعد ذلك أيّة بيضة.

ما هو عدد البيضات ؟

تمـــارين

1 حلّ في Q المعادلات التالية:

أ) $2x+1-\frac{x}{5}=3$ ، ب) $\frac{1}{2}x+\frac{x-1}{3}=\frac{2}{7}$ ، ج) $\frac{t+1}{5}-2\frac{t-1}{3}=\frac{1}{5}$

د) $\frac{2y-7}{3}-\frac{y-2}{2}=y-3-\frac{y+1}{5}$

2 ابحث عن كتابة كسرية للعدد $\frac{5}{7}$ يكون مجموع بسطها و مقامها 132

3 - لتنظيم رحلة لتلاميذها اكترت مدرسة إعدادية حافلات بعضها كبير يتسع لـ 56 راكبا و بعضها لا يتسع إلا لـ 44 راكبا.عدد الحافلات الكبيرة يفوق بـ 4 عدد الحافلات الأخرى.

- ما هو عدد الحافلات من كل صنف إذا علمت أن عدد المشاركين في الرحلة 624 وأنّ كل المقاعد مشغولة؟

4 اشترى شخص جهاز تلفزة و دفع ثمنه على ثلاثة أقساط.

قيمة القسط الأول : ثلث الثمن

قيمة القسط الثاني : خمسي المبلغ المتبقي

- القسط الثالث والأخير :132 دينارا

ما هو ثمن جهاز التلفزة ؟

5 مخزن حبوب مقسم إلى جزأين.

- جزء به 58 طنا وجزء به 76 طنا بقي 52 طنا من الحبوب يتحتم تخزينها. كيف يمكن توزيعها على الجزأين لكي تصبح كمية الحبوب فيها متساوية ؟

6 - DIOPHANTE هو عالم رياضيات. استغرقت طفولته $\frac{1}{6}$ من عمره. تزوج بعد طفولته بـ $\frac{1}{12}$ من عمره

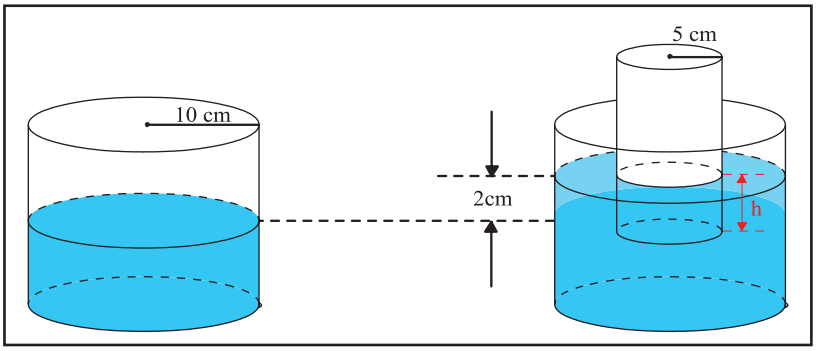
عاش بعد زواجه خمس سنوات و $\frac{1}{7}$ من عمره دون أطفال.

- ثم أنجب طفلا شاء القدر أن يعيش نصف ما عاشه أبوه. توفي DIOPHANTE بعد وفاة الإبن بـ 4 سنوات.
- كم سنة عاش DIOPHANTE ؟

7 تأمل الصورة المقابلة و احسب :

أ) حجم السائل بالإسطوانة الصغرى

ب) ارتفاع السائل بهذه الاسطوانة



8 - مجموع أعمار تلاميذ قسم بمدرسة ابتدائية يساوي 208 سنة

كلّ تلاميذ هذا القسم لهم نفس العمر (بالسنوات) إلاّ ثلاثة

اثنان يزيد عمر كلّ منهما بسنة عن سنّ زملائهم والآخر يقلّ سنّه بسنة عن سنّ زملاءه

ما هو عدد تلاميذ هذا القسم ؟

ما هو سنّ كلّ واحد منهم ؟

9 - معلوم الإشتراك السنوي في إحدى المجلاّت العلمية يقدّر بـ 50 دينار و عدد المشتركين فيها 700.

- بعد دراسة إحصائية لاحظ صاحب المجلّة أنّ عدد المشتركين يزيد بـ 20 عن كلّ تخفيض بدينار في معلوم الإشتراك.

ما هو مقدار التخفيض الّذي يضمن نفس الدّخل ؟ (مقدار التخفيض بالدينار هو عدد صحيح)

10 - انطلق درّاج على الساعة الثامنة صباحا من مدينة A إلى مدينة B التي تبعد عنها 60km
- بسرعة يقدّر معدّلها بـ 24km/h .
- قبل وصوله انفلقت احدى العجلات فأكمل المسافة المتبقية سيرا على الأقدام بسرعة يقدّر معدّلها بـ 4km/h فكان وصوله على الساعة 11h20mn.

ما هي المسافة التي قطعها سيرا على الأقدام ؟

11 ضع الرقم المناسب في كلّ خانة علما أنّه انطلاقا من اليسار إلى اليمين مجموع الأرقام بكل ثلاثة خانات متتالية يساوي 20

...	...	7	...	...	...	...	...	...	...	9	...

12 في قرية تقطن 1250 عائلة بعض هذه العائلات يملك درّاجة واحدة وبعضها يملك دراجتين والبعض الآخر يملك ثلاث دراجات. ما هو العدد الجملي للدراجات بهذه القرية علما أنّ عدد العائلات التي تملك ثلاث دراجات يساوي عدد العائلات التي تملك دراجة واحدة ؟

13 - انطلقت حافلة من مدينة A إلى مدينة B بمعدّل سرعة يساوي 80km/h وانطلقت أخرى في نفس الوقت بمعدّل سرعة يساوي 64km/h متى و في أيّ نقطة تتقابل الحافلتان علما أن المسافة الفاصلة بين المدينتين هي 18km

التناسب

I التناسب الطردي

II بعض خاصيات التناسب الطردي

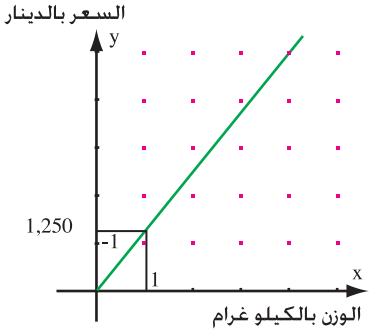
III الأشكال المتشابهة

التناسب

أستحضـــر :

1 تسير سيّارة بمعدّل سرعة 30m/s على طريق تمّ تحديد السرعة القصوى بها بـ 110km/h. هل هذه السيّارة مخالفة ؟

2 يقدّم الرسم المقابل تمثيلا بيانيّا لسعر نوع من الفواكه بالدينار حسب وزنه بالكيلوغرام.



أ- ما هو ثمن 0,5 kg ؟ 3 kg ؟

ب- دفع مواطن 5,250 د ثمن ما اشتراه من هذه الفاكهة.

كم اشترى هذا المواطن، بالكيلوغرام، من هذه الفاكهة ؟

3 قطعة ارض مستطيلة الشكل بعداها 125m و 100m.

أرسم تصميما لهذه القطعة بالسلم $\frac{1}{2500}$.

4 تستخرج مضخّة مياه خمسة عشر لترا في الثانية (15 l/s)

كم تستخرج من متر مكعّب في الساعة ؟

$1m^3=1000l$

5 بإحدى المدارس الإعداديّة :

500 تلميذ بالسنة السابعة أساسي نصفهم إناث.

300 تلميذ بالسنة الثامنة أساسي 40% منهم إناث.

200 تلميذ بالسنة التاسعة أساسي 60% منهم إناث.

نسبة الإناث بهذه الإعدادية هل هي 50 % ؟ أم 75 % ؟ أم 49 % ؟ علّل إجابتك.

I. التناسب الطردي

نشاط 1 يمثّل الجدولان التّاليان الأثمان الأصلية والتخفيضات التي اعتمدها تاجران بإحدى الفضاءات التجاريّة لأربعة أصناف من البضائع.

التاجر الأول				
الثمن الأصلي بالدينار	4	6	10	16
قيمة التخفيض بالدينار	0,480	0,720	1,200	1,920

التاجر الثاني				
الثمن الأصلي بالدينار	8	10	15	20
قيمة التخفيض بالدينار	0,760	2	1,5	3

1) انقل وأتمم تعمير الجدولين التاليين

التاجر الأول				
الثمن الأصلي بالدينار	4	6	10	16
قيمة التخفيض بالدينار	0,480	0,720	1,200	1,920
نسبة التخفيض في صيغة عدد كسري	$\frac{3}{25}$			
النسبةالمأوية للتخفيض	12%			

التاجر الثاني				
الثمن الأصلي بالدينار	8	10	15	20
قيمة التخفيض بالدينار	0,760	2	1,5	3
نسبة التخفيض في صيغة عدد كسري				$\frac{3}{20}$
النسبة المأوية للتخفيض				15%

أيّ التاجرين اعتمد نسبة تخفيض ثابتة ؟

نلاحظ أنّ $\frac{0,480}{4}=\frac{0,720}{6}=\frac{1,200}{10}=\frac{1,920}{16}=\frac{3}{25}=\frac{12}{100}$

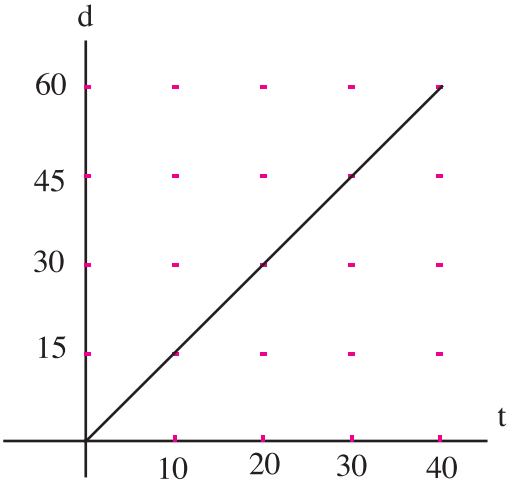
نقول بالنسبة لهذا التّاجر أنّ التخفيض متناسب مع الثمن و أنّ التخفيضات 0,480 و 0,720 و 1,200 و 1,920 متناسبة مع الأثمان 4 و 6 و 10 و 16

العدد $\frac{3}{25}$ يسمّى عامل التناسب و 12% تسمّى النسبة المأويّة للتخفيض.

نشاط 2 خرجت سيّارتان من مدينة في اتّجاه مدينة أخرى تبعد عنها 60km.

الوضعية الأولى

يمثل الرسم (I) أسفله المسافة d التي قطعتها السيارة الأولى(بالكيلومتر) حسب مدة سيرها t بالدقيقة



1) انقل الجدول التالي وأتممه

مدة السير t بالدقائق	10	20	30	40
المسافة المقطوعةd بالكيلومتر	15			
$\frac{d}{t}$	$\frac{15}{10}=\frac{3}{2}$			

2) هل أنّ المتغيرين d و t متناسبان ؟

الوضعية الثانية

يمثل الجدول (II) التالي المسافة التي قطعتها السيّارة الثّانية بالكيلومتر حسب مدّة سيرها بالدّقيقة .

مدة السير t بالدقائق	10	20	30	40
المسافة المقطوعة d	20	30	50	60

1) انقل الجدول التّالي وأتممه

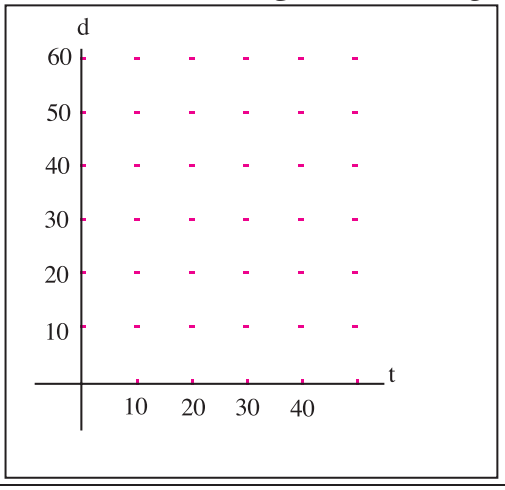
مدة السير t بالدقائق	10	20	30	40
المسافة المقطوعة d بالكيلومتر	20	30	50	60
$\frac{d}{t}$				

2)هل أنّ المتغيرين d و t متناسبان ؟

2) أنقل المعيّن التّالي وعيّن عليه الأربع نقاط التّالية:

M(10 ,20) N(20,30) ; P(30,50) ; Q(40,50)

هل هذه النقاط على استقامة واحدة ؟



بالنسبة للسيّارة الأولى نلاحظ ما يلي

*– المسافة المقطوعة تتغيّر بتغيّر مدّة السّير ولكن النسبة $\frac{d}{t}$ بقيت ثابتة (ومساوية لـ $\frac{3}{2}$)

*– الرسم البياني عددا هو مستقيم يمرّ من النقطة O أصل المعين .

في هاته الحالة نقول أنّ

1– المتغيّرين d و t متناسبان و أنّ $\frac{3}{2}$ هو عامل التناسب.

2– الأعداد 15 و 30 و 45 و 60 متناسبة طردا على التوالي مع الأعداد 10 و 20 و 30 و 40.

يعني $\frac{15}{10}=\frac{30}{20}=\frac{45}{30}=\frac{60}{40}=\frac{3}{2}$.

3- الجدول

40	30	20	10
60	45	30	15

هو جدول تناسب طردي

لنتذكّر :

نعتبر الجدول التالي حيث a, b, c, d,...,y,a',b',c',d',...,x أعداد كسريّة مخالفة للصفر.

a'	b'	c'	d'	...	x
a	b	c	d	...	y

إذا كان لدينا $\frac{y}{x}=\frac{a}{a'}=\frac{b}{b'}=\frac{c}{c'}=\frac{d}{d'}=...$

فإنّ ذلك يعني أنّ:

1.الجدول جدول تناسب طردي

2.الأعداد a , b , c , d... متناسبة طردا مع الأعداد a', b', c', d'...

3.المتغيّران y و x متناسبان طردا

4.الرسم البياني لـ y بدلالة x في معيّن (O ,I, J) هو **مستقيم** يمرّ من **النقطة** O أصل المعيّن

أطبق :

1 من بين الجداول التّالية ما هي جداول التناسب وما هي عوامل التناسب لهذه الأخيرة ؟

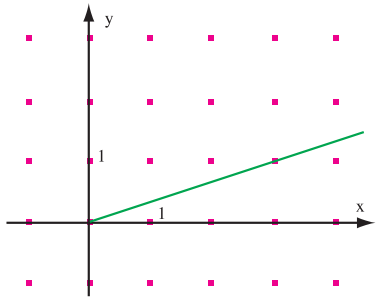
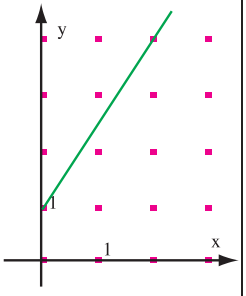
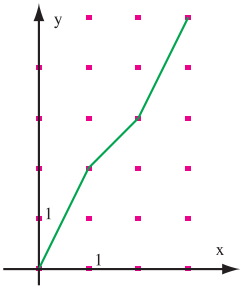
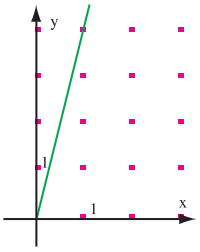
الجدول الأول			
80	12	20	32
60	9	15	24

الجدول الثاني			
18	3	15	21
75	12.5	62.5	77.5

الجدول الثالث			
3	4.5	7.5	12
7	10.5	17.5	15

2 1) أيّ الرسوم البيانية التّالية تمثل وضعيّة تناسب ؟

2) بالنسبة لكلّ حالة تناسب حدّد عامل التناسب.

الرسم البياني عدد4	الرسم البياني عدد3	الرسم البياني عدد2	الرسم البياني عدد1
			

3 في المستوي المقترن بمعيّن (O, I ,J) نعتبر النقاط التالية :

A(-1 ;-0 ,4) ; B(0,5 ;0,2) ; C(3 ;1,2) ; D(7 ;2,8)

أثبت أنّ هذه النقاط تنتمي إلى مستقيم يمرّ من النقطة O. ارسم هذا المستقيم.

4 نعتبر قرصا دائريّا شعاعه R ونرمز بـ P لمحيطه و بـ S لمساحته.

أ-أنقل وأتمم الجدول التّالي :

الشعاع R بالمتر	1	2	3,5	7	10
المحيط P بالمتر				14π	
المساحة S بالمتر المربّع			12.5π		

ب-هل أنّ المتغيرين P و R متناسبين طردا ؟ إن كانا كذلك ما هو عامل التناسب ؟

ج- هل أنّ المتغيرين S و R متناسبين طردا ؟ إن كانا كذلك ما هو عامل التناسب ؟

تمرين مرفق بحلّ

1) أبحث عن العدد a ليكون الجدول التّالي جدول تناسب طردي

3	2
a+3	a

2) أ) أبحث عن العدد b ليكون العددان 14b و b+10 متناسبين طردا مع 7 و 3.

ب) ّابحث عن العددين b و c إذا علمت أنّ الأعداد 14b و b+10 و c+2 متناسبة طردا مع الأعداد 7 و 3 و 4

الحلّ

الجدول السابق جدول تناسب يعني العددين a و a+3 متناسبين طردا مع العددين 2 و 3

يعني $\frac{a}{2} = \frac{a+3}{3}$

يعني $2a+6=3a$ يعني $a=6$ و في هذه الحالة يصبح الجدول

3	2
9	6

و عامل التناسب هو 3

2)أ) العددان 14b و b+10 متناسبين طردا مع 7 و 3 يعني $\frac{14b}{7} = \frac{b+10}{3}$

$\frac{14b}{7} = \frac{b+10}{3}$ يعني $2b = \frac{b+10}{3}$ يعني $6b = b+10$ يعني $5b = 10$ يعني $b = 2$

ب) الأعداد 14b و b+10 و c+2 متناسبة طردا مع الأعداد 7 و 3 و 4

يعني $\frac{14b}{7} = \frac{b+10}{3} = \frac{c+2}{4}$ يعني $\frac{14b}{7} = \frac{b+10}{3}$ و $\frac{b+10}{3} = \frac{c+2}{4}$ يعني $b = 2$

و

إذا عوضنا b بقيمتها في المساواة $\frac{b+10}{3} = \frac{c+2}{4}$ يصبح لدينا $\frac{12}{3} = \frac{c+2}{4}$ يعني $16 = c+2$

يعني $c = 14$

بالتّالي تكون الأعداد 14b و b + 10 و c+2 متناسبة طردا مع الأعداد 7 و 3 و 4 إذا كان

$b = 2$ و $c = 14$

وفي هذه الحالة فإنّ $14b=28$ و $10+b=12$ و $C+2=16$

والأعداد 28 و 12 و 16 متناسبة طردا مع الأعداد 7 و 3 و 4 $\left(\frac{28}{7} = \frac{12}{3} = \frac{16}{4} = 4\right)$

نشاط 3 الرابع التناسبي

انقل و اتمم تعمير جداول التناسب الطردي التّالية

2	5
6	...

...	2,5
5	3,2

-21	...
14	6

0,25	2
7,5	...

في كل جدول من جداول التناسب الطردي السابقة إذا كانت ثلاثة أعداد منه معلومة فيمكن احتساب الرابع. يسمّى هذا العدد الرّابع التّناسبي

اطبق :

1 يبيّن الجدول التالي سعر بضاعة بالدينار حسب وزنها بالكيلوغرام. انقل هذا الجدول و أتممه

الوزن بالكيلوغرام	3,5	5,5	2		
السعر بالدينار	8,750			3,750	12.500

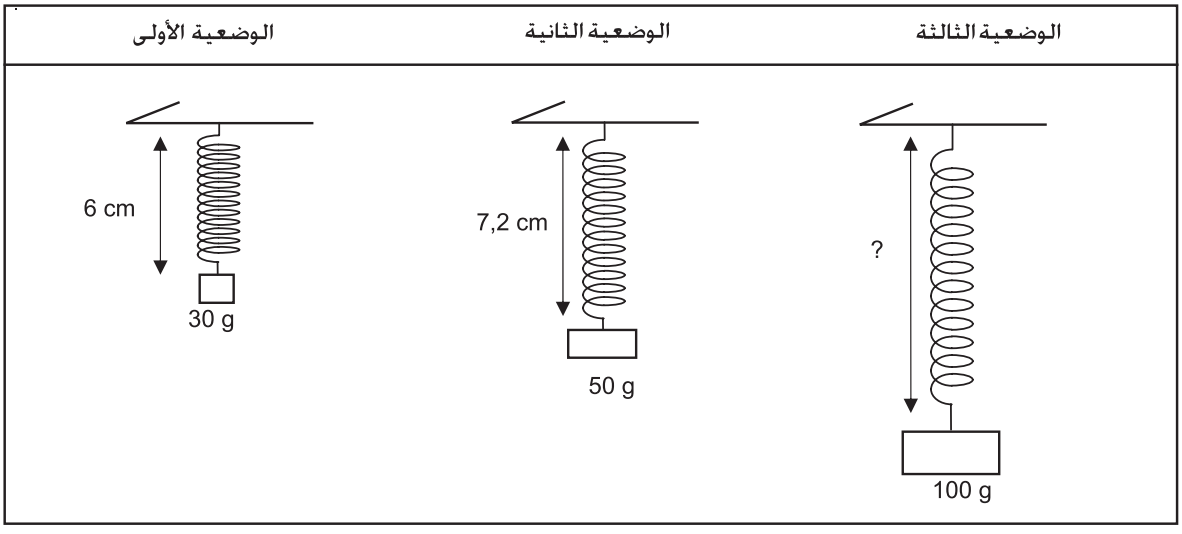
2 تستهلك سيارة 8 لترا من البنزين لكل 100km

ما هي المسافة التي تقطعها بـ 26 لترا من البنزين؟

ما هي كمية البنزين اللازمة لقطع 420km ؟

3 يتمطّط نابض بشكل متناسب مع الكتلة المعلّقة به.

تأمّل الصور التّالية و حدّد طول النابض في الوضعيّة الثالثة.



4 يتمدّد عمود حديدي بشكل متناسب مع درجة الحرارة التي يتعرض لها.

إذا كان طوله 76,40cm في درجة حرارة 20°C و طوله 76,55cm في درجة حرارة 100°C فما هو طوله في درجة حرارة 200°C ؟

II بعض خاصيات التناسب الطردي

نشاط 1 إذا كان ثمن 3,5kg من التفاح هو 10,150د فما هو ثمن 0,5kg ؟، 4,5kg ؟، 7,5kg ؟، 10,5kg ؟

نشاط 2 نعتبر جدول التناسب المقابل حيث a و b و c و d و k أعداد كسرية نسبيّة مخالفة للصفر و $b \neq -d$ و $b \neq d$

d	b
c	a

أثبت أن كلّ جدول من الجداول التّالية هو أيضا جدول تناسب

kb	d	b
ka	c	a

b-d	d	b
a-c	c	a

b+d	d	b
a+c	c	a

إذا كان العددان a و c متناسبين مع العددين b و d فإنّ:

*الأعداد a و c و a + c متناسبة مع الأعداد b و d و b+ d

*الأعداد a و c و a – c متناسبة مع الأعداد b و d و b– d

*الأعداد a و c و k a متناسبة مع الأعداد b و d و kb مهما كان العدد الكسريّ النّسبيّ المخالف للصفر k.

أي

$$\frac{a}{b}=\frac{c}{d} \quad \text{يعني} \quad \frac{a}{b}=\frac{c}{d}=\frac{a+c}{b+d}$$

$$\frac{a}{b}=\frac{c}{d} \quad \text{يعني} \quad \frac{a}{b}=\frac{c}{d}=\frac{a-c}{b-d}$$

$$\frac{a}{b}=\frac{c}{d} \quad \text{يعني} \quad \frac{a}{b}=\frac{c}{d}=\frac{ka}{kb}$$

اطبق :

1 انقل واتمم تعمير جدول التّناسب المقابل

$a-\frac{1}{2}b+\frac{3}{4}c$		$2a-3b-5c$	$a+b+c$		c	b	a
	$\frac{2}{3}x-y$			$x-y+z$	z	y	x

2 ينتج 1,5kg من إحدى بذور 27 قنطارا.

انقل الجدول المقابل وأتممه

البذور بالكيلوغرام	1,5		6		13,5	9,5
الإنتاج بالقنطار	27	81		135		

3 جد كتابة كسرية للعدد $\frac{3}{7}$ يكون الفارق بين مقامها و بسطها 68

4 أعمار أب وأبناءه الثلاثة متناسبة طردا مع الأعداد 15 و 7 و 5 و 4.

ما هو عمر كل واحد منهم إذا علمت أنّ مجموع أعمار الأولاد يفوق عمر الأب بثلاث سنوات

5 ابحث عن عددين x و y حيث $\frac{x}{y}=\frac{7}{4}$ و $11x-13y=9$

تمرين مرفق بحل 1

1 جد كتابة كسريّة للعدد $\frac{3}{11}$ يكون مجموع بسطها ومقامها 112

الحل

الطريقة الأولى :

المطلوب هو إيجاد عددين a و b بحيث $\frac{a}{b}=\frac{3}{11}$ و $a+b=112$

$\frac{a}{b}=\frac{3}{11}$ يعني $\frac{a}{3}=\frac{b}{11}$

$\frac{a}{3}=\frac{b}{11}$ يعني $\frac{a}{3}=\frac{b}{11}=\frac{a+b}{3+11}$. وبما أنّ $a+b=112$ فإنّ $\frac{a}{3}=\frac{b}{11}=\frac{a+b}{3+11}=\frac{112}{14}=8$

وبالتّالي $\frac{a}{3}=8$

أي $a = 24$ و $\frac{b}{11} = 8$ أي $b = 88$

$\frac{24}{88}$ هي إذن كتابة أخرى للعدد $\frac{3}{11}$ مجموع بسطها ومقامها 112

الطريقة الثانية :

المطلوب هو إيجاد عدد x بحيث $\frac{3}{11} = \frac{3 \times x}{11 \times x}$ و $3x + 11x = 112$

$3x + 11x = 112$ يعني $14x = 112$ يعني $x = 8$ و بالتّالي فإنّ $\frac{3}{11} = \frac{3 \times 8}{11 \times 8} = \frac{24}{88}$

تمرين مرفق بحل 2

2 لرجل 3 أبناء أعمارهم 5 سنوات و 11 سنة و 14 سنة.وزّع عليهم يوم العيد مبلغا قدره 84 دينارا.

وكان نصيب كلّ ولد متناسبا طردا مع عمره.

ما هو مناب كلّ واحد ؟

الحل

نرمز بـ a و b و c لمنابات الأطفال الثلاثة

بما أنّ المنابات متناسبة مع الأعمار فذلك يعني $\frac{a}{5} = \frac{b}{11} = \frac{c}{14}$.

إذا $\frac{a}{5} = \frac{b}{11} = \frac{c}{14} = \frac{a+b+c}{5+11+14} = \frac{84}{30} = \frac{14}{5}$

إذا يصبح لدينا $\frac{a}{5} = \frac{14}{5}$ يعني $a = 14$د .

و $\frac{b}{11} = \frac{14}{5}$ يعني $5b = 11 \times 14 = 154$ إذا $b = \frac{154}{5} = 30,800$د

و $\frac{c}{14} = \frac{14}{5}$ يعني $5c = 196$ يعني $c = \frac{196}{5} = 39,200$ د

يمكننا التحقّق من صحّة الإجابة كما يلي: أ) $a + b + c = 14 + 30,800 + 39,200 = 84$

ب) المبالغ 14 و 30,800 و 39,200 متناسبة طردا مع الأعمار 5 و 11 و 14

أي $\frac{39,200}{14} = \frac{30,800}{11} = \frac{14}{5}$

III.الأشكال المتشابهة

نشاط 1

ارسم مثلثا ABC.ارسم على نصف المستقيم [AB] النقطة M حيث $AM = 3AB$

ارسم على نصف المستقيم [AC] النقطة N حيث $AN = 3AC$

1) تحقّق أنّ $\frac{AM}{AB} = \frac{AN}{AC} = \frac{MN}{BC} = 3$

2) نرمز بـ P لمحيط المثلث AMN و بـ P' لمحيط المثلث ABC.أثبت أنّ $\frac{P}{P'} = 3$

نستنتج أنّ أضلاع المثلث AMN و محيطه متناسبة مع أضلاع المثلث ABC ومحيطه وعامل التناسب يساوي 3

كما أنّ أضلاع المثلث ABC متناسبة مع أضلاع المثلث AMN وعامل التناسب يساوي $\frac{1}{3}$

نقول في هذه الحالة أنّ:

1-* المثلث AMN متشابه مع المثلث ABC و عامل التشابه هو3 (أو المثلثAMN هو تكبير للمثلثABC و عامل التكبيرهو3)

2 -* المثلث ABC متشابه مع المثلث AMN و عامل التشابه هو $\frac{1}{3}$ أو (المثلث ABC هو تصغير للمثلث AMN و عامل التّصغير هو $\frac{1}{3}$)

3 -* المثلثان AMN و ABC متشابهان

نشاط 2

أرسم مثّلثا ABC قائما في A.ابن النقطة M مناظرة النقطة B بالنسبة للنقطة A و ابن النقطة N مناظرة النقطة B بالنسبة للنقطة C

1) حقّق أنّ $\frac{MN}{AC} = 2$.استنتج أنّ المثلث MBN متشابه مع المثلث ABC .ما هو عامل التشابه؟

2) نرمز بـ P و S على الترتيب لمحيط و مساحة المثلث MBN ونرمز بـ P' و S' على الترتيب لمحيط و مساحة المثلث ABC أحسب P بدلالة P' و أحسب S بدلالة S'.

بصفةعامة: نقول عن مضلعين أنّهما متشابهان إذا كانت أضلاع الواحد متناسبة على الترتيب مع أضلاع الآخر

*المثلّث MNP متشابه مع المثلّث ABC يعني $\frac{MN}{AB}=\frac{MP}{AC}=\frac{NP}{BC}$

*الرّباعيّ ABCD متشابه مع الرّباعيّ IJKL يعني $\frac{AB}{IJ}=\frac{BC}{JK}=\frac{CD}{KL}=\frac{DA}{LI}$

*إذا كان عامل التشابه أكبر من واحد نقول أنّ الشكل الأول هو تكبير للشكل الثاني

*إذا كان عامل التشابه أصغر من واحد نقول أنّ الشكل الأوّل هو تصغير للشكل الثّاني

اطبق :

1 نعتبر مثلثين متقايسين ABC وMNP. أثبت أنّهما متشابهان. ما هو عامل التشابه

2 1) أبن مثلّثا ABC أبعاده بالصنتمتر 4 و 5 و 6.

2)أ-أبن مثلّثا A'B'C' مشابها له و قيس أصغر أضلاعه 6.

ب-أحسب محيطيهما.

3) تقدّر مساحة المثلث ABC بـ $10cm^2$

ما هي مساحة المثلث A'B'C' ؟

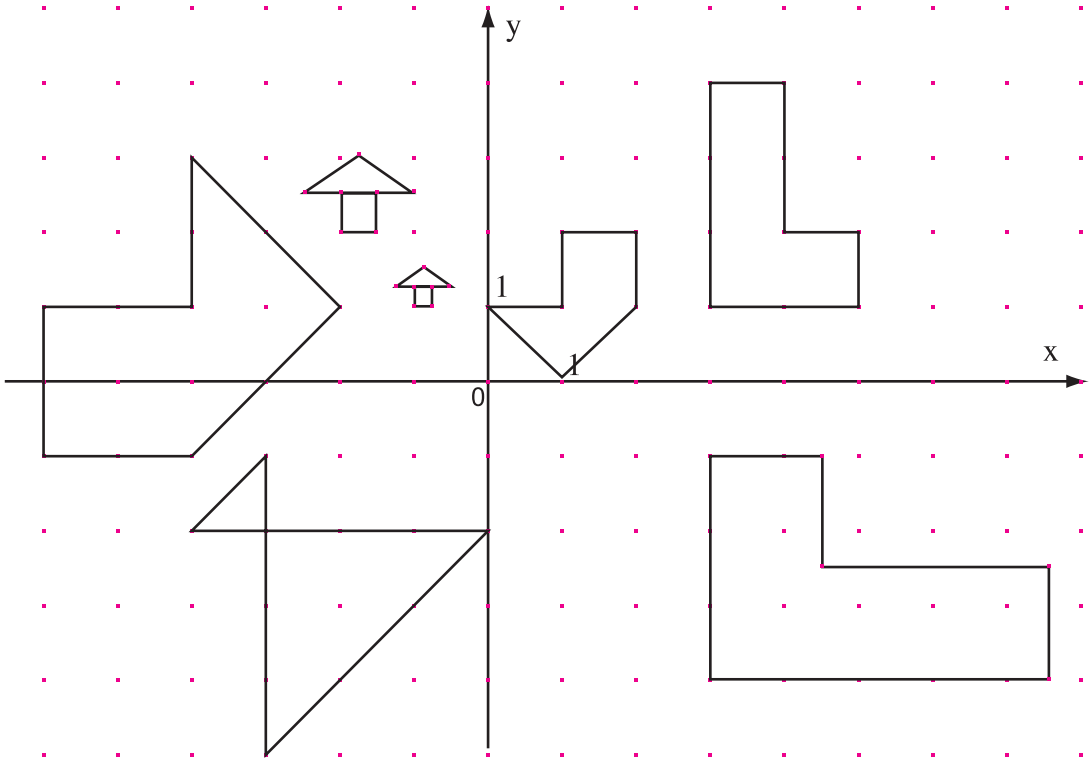
4) ليكن MNP تصغيرا للمثلّث ABC عامله $\frac{3}{4}$.

أ - أحسب محيط المثلّث MNP .

ب - ما هي مساحته ؟

ج- ما هي أبعاده ؟

3 تأمّل الرسوم التّالية وحدّد الأشكال المتشابهة وعوامل تشابهها



أحوصـــل

بصفة عامة نعتبر الجدول التالي :

.....	d’	c’	b’	a’	x
.....	d	C	b	a	y

حيث a ,b ,c ,d,...,a’,b’,c’,...,x أعداد كسريّة مخالفة للصفر. إذا كان لدينا

$$\ldots=\frac{d}{d'}=\frac{c}{c'}=\frac{b}{b'}=\frac{a}{a'}=\frac{y}{x}$$

فإنّ ذلك يعني أنّ:

1) الجدول جدول تناسب طردي

2) الأعداد a , b , c , d... متناسبة طردا مع الأعداد a’, b’, c’, d’...

3) المتغيّرين y و x متناسبان طردا

الرسم البياني لـ y بدلالة x في معيّن (O ,I, J) هو **مستقيم** يمرّ من **النقطة** O أصل المعيّن .

إذا كان العددان a و c متناسبين مع العددين b و d فإنّ:

*الأعداد a و c و a + c متناسبة مع الأعداد b و d و b+ d

*الأعداد a و c و a – c متناسبة مع الأعداد b و d و b– d

*الأعداد a و c و k a متناسبة مع الأعداد b و d و kb مهما كان العدد الكسريّ النّسبيّ المخالف للصفر k.

أي

$\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$ يعني $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}=\frac{a+c}{b+d}$

$\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$ يعني $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}=\frac{a-c}{b-d}$

$\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$ يعني $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}=\frac{ka}{kb}$

نقول عن مضلعين انّهما متشابهان إذا كانت أضلاع الواحد متناسبة على الترتيب مع أضلاع الآخر

*المثلّث MNP متشابه مع المثلّث ABC يعني $\frac{MN}{AB}=\frac{MP}{AC}=\frac{NP}{BC}$

*الرّباعيّ ABCD متشابه مع الرّباعيّ IJKL يعني $\frac{AB}{IJ}=\frac{BC}{JK}=\frac{CD}{KL}=\frac{DA}{LI}$

*إذا كان عامل التشابه أكبر من واحد نقول أنّ الشكل الأول هو تكبير للشكل الثاني

*إذا كان عامل التشابه أصغر من واحد نقول أنّ الشكل الأوّل هو تصغير للشكل الثّاني

تمـــارين

1 حوّل ما يلي إلي دقائق

أ- $\frac{3}{4}$h (ثلاثة أرباع الساعة) ب- $\frac{1}{2}$ h (نصف ساعة) ج- 1,25h د- 3,7 h

2 إذا كانت 9 cm هي المسافة الفاصلة بين مدينتين حسب السلم $\frac{1}{500.000}$ فما هي بالكيلومتر المسافة الفعلية بينهما ؟

3 إذا كان معدل سرعة دراجة نارية هي **36 km/h** فما هي معدّل سرعتها بالمتر في الثانية (m/s) ؟

4 قطع علي مسافة 1.6 km في 20 دقيقة و قطع محمد مسافة 250 m في3 دقائق أما أحمد فقد قطع مسافة 450 m في5 دقائق.

أيهم أسرع ؟

5 توفر محطة توزيع مياه صالحة للشرب 2 متر مكعب في الثانيةوتستهلك العائلة الواحدة معدل 400 لترا كل24 ساعة.

كم من عائلة يمكن أن تستفيد هذه المحطة ؟

6 يبيّن الجدول التالي معدل استهلاك سيارة من البنزين(باللتر) في 100 km حسب سيرها في طريق عادية أو في الطريق السيّارة أو داخل المدن .

	طريق عادية	طريق سيّارة	داخل المدن
معدل الاستهلاك باللتر في 100 Km	8	10	12

1) ما هي المسافة التي يمكن قطعها ب 16 لترا من البنزين

أ–في طريق عادية ، ب– في طريق سيارة ، ج– داخل المدن

2) انطلقت هذه السيارة على الساعة الثامنة والربع صباحا من تونس باتجاه إحدى مدن الجنوب فقطعت ثلث المسافة في الطريق السيارة

و 60 % منها في طريق عادية و قطعت الجزء المتبقي من المسافة والمقدر ب 30 Km داخل المدن.

أ – ما هي المسافة بين المدينتين ؟

ب– ما هي كمية البنزين المستهلكة في هذه السفرة ؟

ج– ما هو معدل سرعة هذه السيارة إذا علمت أنها وصلت المدينة المقصودة على الساعة الثانية والنصف بعد الزوال ؟

7 اشترى رجل قميصا ثمنه الأصلي 36د و تمتّع بتخفيض نسبته 4% ;واشترى معطفا ثمنه الأصلي 180د و تمتّع بتخفيض نسبته 9%

1–ما هو المبلغ الجملي لهذه المشتريات ؟

2 –ما هي نسبة التخفيض التي تمتّع بها بشرائه للقميص والمعطف معا ؟

8 بمناسبة أحد المعارض قرر ثلاثة تجار التخفيض في أسعار بضاعتهم فكتب الأول"تخفيض بـ : 20% " والثاني : "تخفيض بربع الثمن الأصلي" وأما الثالث فبضاعته كلّها من نفس النوع ومكتوب عليها "الثمن القديم 45د و الثمن الجديد 35د".

من هو التاجر الذي يوفّر أكبر نسبة تخفيض ؟

9 نعلم أنّ الأرض تدور حول الشمس بسرعة 107.10^3 km/h

1–عبّر بكتابة علمية عن سرعة دورانها بالمتر في الثانية.

2-إذا كانت الأرض تتم دورة كاملة حول الشمس في 365 يوما و 6 ساعات فما هي المسافة التي تقطعها في هذه الدورة؟

أعط قيمة تقديرية بالآلاف لهذه المسافة.

10 تبلغ سرعة الضوء 300.000 km/s

1- عبر بكتابة علميّة عن سرعته بالكيلومتر في الساعة

2 - السنة الضوئية (année lumière) هي وحدة قيس تساوي المسافة التي يقطعها الضوء في سنة (365 يوما و 6 ساعات).

ما هي قيمة السنة الضوئية بالكيلومتر؟ أعط قيمة تقديرية بالملايين لذلك.

3-تقدر المسافة بين الأرض و الشمس بـ $1,5.10^8$ Km

ما هو الوقت الذي يقضّيه شعاع ضوئي بين الشمس و الأرض؟

11 من بين الجداول التالية ما هي جداول التناسب الطردي وما هي عوامل التناسب لهذه الأخيرة ؟

الجدول الأول			
4,5	-3	15	-7,5
-1,5	1	-5	2,5

الجدول الثاني			
77,5	62,5	12,5	75
21	15	3	18

الجدول الثالث			
-15	-17.5	10,5	-7
12	7.5	-4,5	3

12 انقل واتمم جداول التناسب الطردي التّالية

الجدول الأول			
	2,25	56	-28
-5,8		-8	

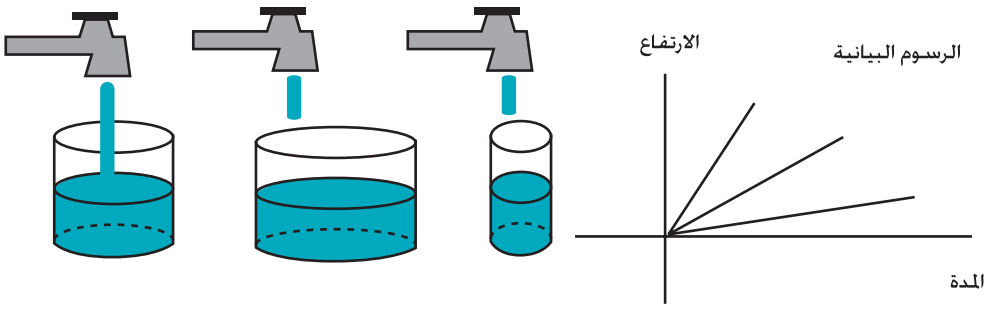
الجدول الثاني			
5	10		6,25
	4	-3	

الجدول الثالث			
0,5		1	
	36	4	-2,75

13 تملأ الأوعية الثلاثة التالية بنفس الطريقة وبحساب لتر واحد في الثانية

وتمثّل الرسوم البيانية ارتفاع الماء بهذه الأوعية حسب المدّة.

14

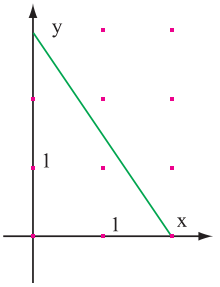
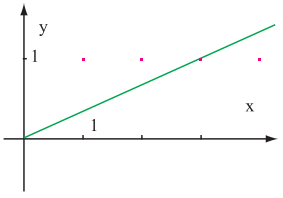
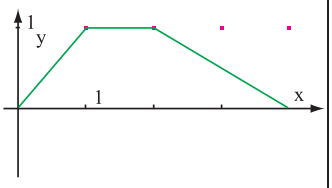
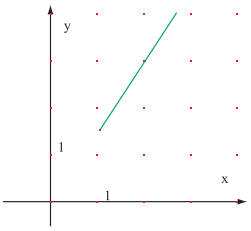


15 –حدّد التمثيل البياني الموافق لكل وعاء.

ساهم ثلاثة أشخاص بالمبالغ التالية 50.000 د و 110.000د و 140.000د لتأسيس شركة.
وبعد سنة كانت مرابيح هذه الشركة 48.000 د اقتسمها الشركاء بشكل متناسب مع مبالغ مساهماتهم في رأس المال.
ما هو مناب كلّ شريك ؟

16 ابحث عن عددين a و b حيث $\frac{a}{b}=\frac{3}{4}$ و $9a+7b=5$

17 من بين الرسوم التالية ما هي التي تمثّل وضعيّة تناسب طردي و ما هي عوامل التناسب ؟

الرسم البياني عدد4	الرسم البياني عدد3	الرسم البياني عدد2	الرسم البياني عدد1
			

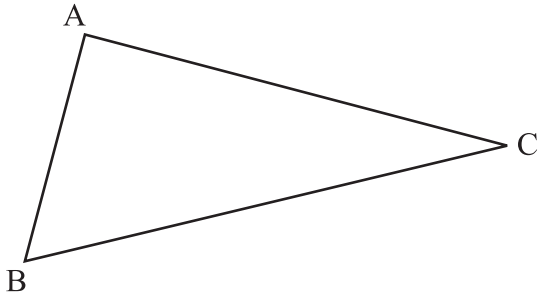
$750\ m^2$ و $840\ m^2$ و $650\ m^2$ و $960\ m^2$ هي مساحات أربع قطع أرض صالحة للبناء تكلّفت تهيئة هذه الأراضي 24.000د
ما هي تكلفة تهيئة كلّ واحدة منها علما أنّها متناسبة مع مساحتها؟

18 يشتغل عاملان بنفس الحضيرة ويتقاضيان معا أجرا يوميّا قدره 40 د.

في أحد الأشهر كان الأوّل قد اشتغل لمدّة 27 يوما والثاني لمدّة 23 يوما فنالا مقابل ذلك مبلغا جمليّا قدره 984 د.

ما هو الأجر اليومي لكلّ واحد منهما ؟

19 1) أرسم مثلثا MNP متشابه مع المثلث ABC المقابل ويقيس أطول أضلاعه 10cm.



2) أ- أرسم تصغيرا للمثلثABC عامله 0.5

ب- قارن محيطيهما و مساحتيهما

3) أ- أرسم تكبيرا للمثلث ABC عامله 1.5

ب- قارن محيطيهما ومساحتيهما

20 تبيض دجاجتان أربع بيضات في ثلاثة أيام. كم من بيضة تبيض اثنتا عشرة دجاجة في اثني عشر يوم ؟

21 تحمل باخرة 800 جنديا ولها ما يكفيها من المؤونة لمدة 90 يوما. بعد 40 يوما من الإبحار انضم إليها 200 جندي.

بعد كم يوم تنفذ المؤونة ؟

22 يبني ثلاثة عمال حائطا طوله 6 أمتار وارتفاعه متر واحد في ساعة.

1) في كم من ساعة يبني خمسة عمال يشتغلون بنفس الطريقة وبنفس الوتيرة حائطا طوله 12 مترا وارتفاعه متر واحد ؟

2) ما هو طول حائط ارتفاعه متر واحد تم بناءه من طرف أربعة عمال في ساعة ونصف ؟

10

الإحصاء و الإحتمالات

I الإحصاء

II أمثلة لظواهر عشوائية

الإحصاء و الاحتمالات

I ـ الإحصاء

أستحضـر :

1 في ما يلي درجات الحرارة المسجلة بإحدى المدن خلال شهر جويلية :

35	38	37	35	34	34	33	37	38	32
35	35	37	39	38	35	37	35	34	37
35	36	38	37	32	37	39	37	35	34
									32

إذا كانت دراسة إحصائية في صورة أعداد نقول أن السلسلة المتحصّل عليها ذات ميزة كميّة

درجات الحرارة المسجّلة تسمّى قيم هذه السلسلة الإحصائية وعدد أيام شهر جويلية (31) يسمّى تكرارها الجملي.

1) حوصل هذه السلسلة الإحصائية في الجدول التالي

درجات الحرارة	32	33	34	35	35	37	38	39
عدد الأيام								

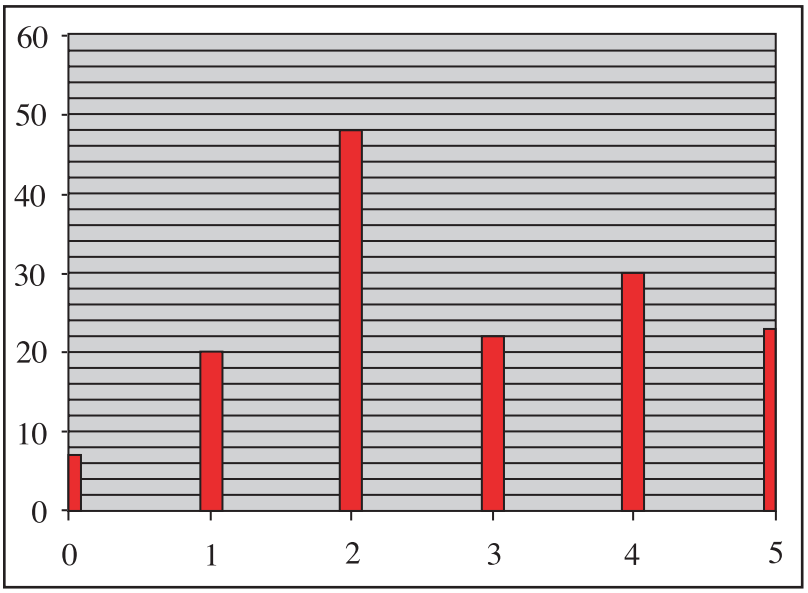
2) أ) مثل السلسلة الإحصائية بمخطّط العصيات .

ب) ما هو معدل درجات الحرارة بهذه المدينة في شهر جويلية ؟

3) أ) ما هو عدد الأيام التي سجلت بها درجات حرارة تفوق 36 درجة ؟

ب) ما هو عدد الأيام التي سجلت بها درجات حرارة أقل من 36 درجة ؟

2 يمثّل مخطّط العصيّات التّالي نتائج دراسة إحصائية شملت 150 أسرة للتعرّف على عدد الأطفال بكلّ منها



1) أنقل مخطط العصيات.

2) أنقل الجدول التالي وأكمله باعتماد هذا المخطّط

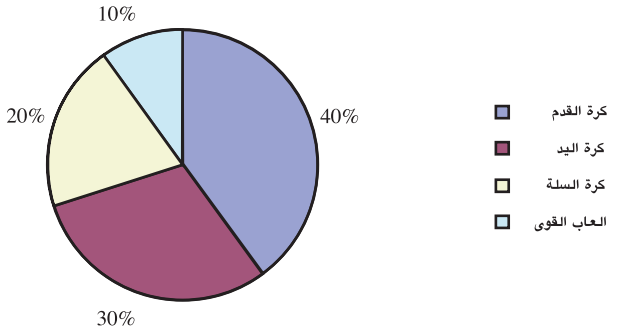
عدد الأطفال	0	1	2	3	4	5
عدد الأسر	7					23
التواتر بالنسبة المائوية						

3) ما هو معدل الأطفال بكل أسرة ؟

4) ما هي نسبة الأسر التي لها أقلّ من 3 أطفال ؟

5) ما هي نسبة الأسر التي لها أكثر من طفلين ؟

3 يمثّل المخطّط الدائري التالي توزّع 650 تلميذا بإحدى المدارس الإعدادية حسب نوع الرياضة التي يمارسونها.



أ) أنقل الجدول التالي و أكمله باعتماد المخطّط السّابق .

نوع الرياضة	كرة اليد	كرة القدم	كرة السلة	ألعاب القوى
عدد التلاميذ				

ب) ماهي الرياضة الّتي يمارسها أكبر عدد من التلاميذ ؟

4 يمثّل الجدول التالي مداخيل شهر جويلية لمغازة مختصّة في بيع الهدايا التذكارية حسب الصنف.

الصنف	بطاقات بريدية	ملابس	تحف	ساعات يدوية	بضاعة متنوعة
المبيعات بالدينار	240	360	440	160	360
النسبة المائوية					

أ) أنقل الجدول ثمّ أكمله

ب) ما هو الصنف الذي سجّل أكبر مدخول مالي ؟

ت) ماهي الأصناف التي سجّلت مدخولا يفوق 300 دينار ؟ أقل من 200 دينار ؟

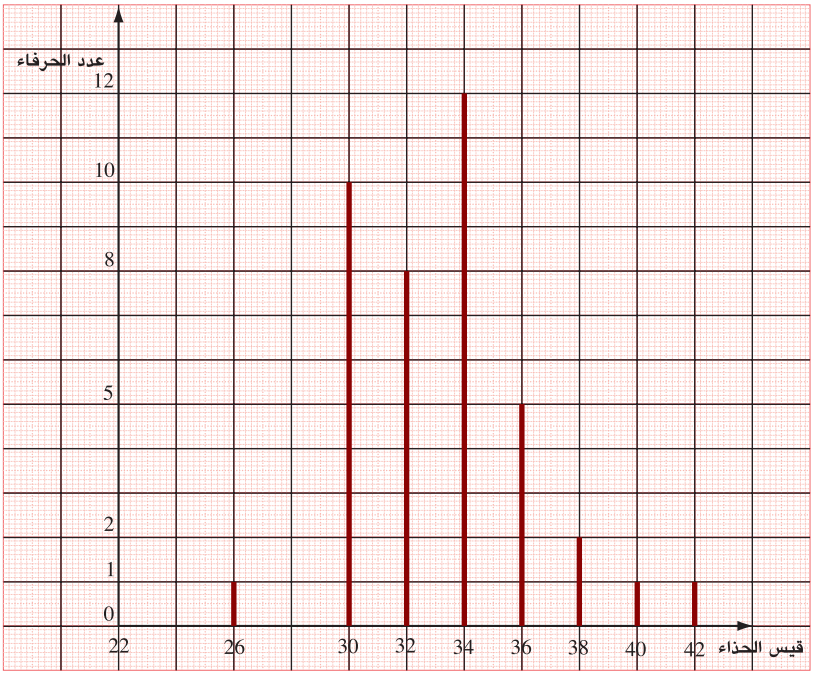
ث) مثّل الجدول السابق بمخطّط القطاع الدائري.

5 ابن مخطّطا نصف دائري (قطره 10صم) يبرز نتائج الانتخابات التالية:

صالح تحصّل على% 30 من الأصوات ، فاطمة على 25%، مريم 20%،فيصل 15% و سمير10%.

1 .مضلع التكرارات لسلسلة إحصائيّة ذات ميزة كمّية منقطعة

نشاط يقدّم التمثيل التالي نتائج إحصائية قام بها صاحب مغازة بيع أحذية حول عدد الحرفاء حسب أقيسة الأحذية التي ابتاعوها منه خلال أسبوع.



1) أرسم قطع المستقيمات التي تربط بين رؤوس العصيات.

يسمّى الخط الذي تحصلت عليه "مضلع التكرارات"

2) أ) ما هي النسبة المئوية للحرفاء الذين ابتاعوا أحذية قيسها 32 ؟

ب) انقل الجدول التالي ثم أتممه.

قيس الأحذية		30					
نسبة الحرفاء		$\frac{1}{4}$					

النسبة $\frac{1}{4}$ الموافقة للقيس 30 تسمّى "تواتر مبيعات الحذاء الذي قيسه 30" ونكتبها بصفة عامة في صيغة نسبة مائوية. ما هذه النسبة المائوية ؟

ج) أرسم مخططا العصيّات الموافق للتواتر ثم أرسم مضلّع التواتر.

اطبق :

1 يمثل الجدول التالي توزّع مشاركي نادي تنس حسب أعمارهم:

العمر	12	13	14	15	16	17
التكرار	3	2	7	4	5	4

ا) مثل السلسلة الإحصائية بمخطّط العصيات وأرسم مضلّع التواتر

ب) أحسب معدّل أعمار مشاركي هذا النادي

2 في اختبار، على 4 نقاط، أجريت لـ 375 تلميذ من مدرسة إعداديّة، تحصلنا على الجدول غير التام التّالي:

العدد المتحصّل عليه	0	1	2	3	4
التكرار	30	15		15	30
التّواتر بالنّسبة المائوية			28	20	

1) أنقل الجدول و أتممه

2) مثّل السلسلة بمخطّط العصيّات وأرسم مضلّع التّواتر.

3) أحسب معدّل الأعداد المتحصّل عليها

2. موسّط سلسلة إحصائيّة ذات ميزة كميّة منقطعة

نشاط 1 يمثّل الجدول التّالي عدد الهواتف الخلويّة لدى 15 عائلة تمّ استجوابها.

عدد الهواتف	0	1	2	3	4	5
عدد العائلات	3	6	2	1	2	1

1) أحسب معدّل عدد الهواتف الخلوية بالعائلة الواحدة .

2) يمكن إعادة تنظيم هذه النتائج بالطريقة التالية:

نكتب النتائج مرتّبة تصاعديّا (أو تنازليّا) وبصورة فردية أي بالنسبة إلى كلّ عائلة. نتحصّل على ما يلي

5 4 4 3 2 2 1 [1] 1 1 1 1 0 0 0

يمثّل العدد 1 المؤطّر قيمة الميزة التي تقسم السلسلة إلى جزأين لهما نفس التكرار 7.

تسمّى هذه القيمة موسّط الميزة ونرمز له بـ Me.

موسّط سلسلة إحصائية منقطعة هو قيمة للميزة تجزّء السلسلة إلى جزأين لهما نفس التّكرار

نشاط 2 يمثل الجدول التالي الأعداد التي تحصل عليها 14 تلميذا في فرض الرياضيات.

العدد	7	8	9	10	11	12	13	14	15
عدد التلاميذ	2	1	2	1	1	2	2	1	2

1) أحسب معدّل هذه المجموعة من التلاميذ.

2) نريد إيجاد موسّط هذه الميزة.

قم بتنظيم هذه السلسلة كما في النشاط السابق.هل يمكن تحديد الموسّط Me؟

في هذه الحالة يصطلح أن يؤخذ المعدّل الحسابي لـ11 و 12 وبالتّالي $Me=\frac{11+12}{2}=11,5$

ونلاحظ أنّ عدد التلاميذ المتحصلين على معدل أصغر من 11,5 يساوي عدد التلاميذ المتحصلين على معدل أكبر من 11,5

-لإيجاد موسط سلسلة إحصائيّة ذات ميزة كمية منقطعة تكرارها الجملي N, نرتّب قيمها تصاعديّا أو تنازليّا ويكون الموسّط هو:

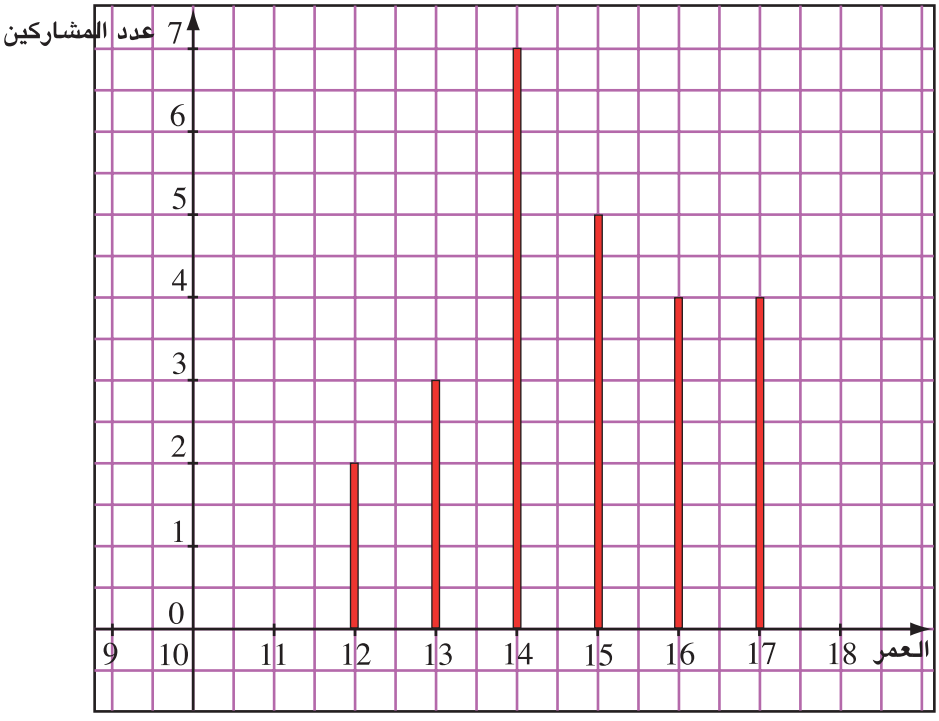
- القيمة التي ترتيبها $\frac{N+1}{2}$ إذا كان N عددا فرديّا.

المعدّل الحسابي للقيمتين اللتين ترتيبهما $\frac{N}{2}$ و $\frac{N}{2}+1$ إذا كان N عددا زوجيّا.

لنا التكرار الجملي $N=14$ و هو عدد زوجي و القيمة الّتي ترتيبها تصاعديّا 7 (أي $\frac{N}{2}$) هي 11 والقيمة الّتي ترتيبها 8 (أي $\frac{N}{2}+1$) هي 12 إذا موسّط السلسلة الإحصائيّة هو المعدّل الحسابي للقيمتين 11 و 12 أي $Me=\frac{11+12}{2}=11,5$

أطبق :

1 يمثّل مخطّط العصيّات التّالي توزّع مشاركي نادي سباحة حسب أعمارهم .



1) ما هو عدد المشاركين بهذا النادي؟

2) انقل الجدول التالي ثمّ أتممه.

العمر بالسنة						
التكرار						
التواتر بالنسبة المائوية						

3) ما هو موسّط هذه السلسلة الإحصائية ؟.ما هو معدّل أعمار مشاركي هذا النادي؟

4) أرسم مضلع التواترات لهذه السلسلة الإحصائية.

3. السلسلة الإحصائيّة ذات ميزة كميّة مسترسلة

نشاط تمثّل سلسلة الأعداد التّالية طول القامة لـ 80 تلميذ من مدرسة إعداديّة بالصّنتمتر.

170	159	165	148	168	158	152	164	167	140
141	169	156	168	145	163	148	150	152	164
165	147	159	151	157	158	160	152	166	149
156	154	166	171	163	140	155	146	157	173
166	165	162	142	159	163	157	160	163	151
149	156	144	154	151	160	145	147	150	153
166	158	162	147	154	148	153	162	143	170
151	142	164	148	158	150	155	145	156	165

1) أنقل الجدول التّالي ثمّ أكمله.

طول القامة بالصّنتمتر	140	141	142	143	144	145	146	147	148	149	...
عدد التلاميذ											

2) أنقل الجدول التّالي ثمّ أكمله.

طول القامة	من 140 إلى ما دون 145	من 145 إلى ما دون 150	من 150 إلى ما دون 155	من 155 إلى ما دون 160	من 160 إلى ما دون 165	من 165 إلى ما دون 170	من 170 إلى ما دون 175
عدد التلاميذ	7	13					

نلاحظ أنّه تم توزيع قيم هذه الميزة إلى سبعة مجموعات بحيث يكون الفرق بين الأطوال في كلّ منها يساوي 5 (الفئات لها نفس الطّول).

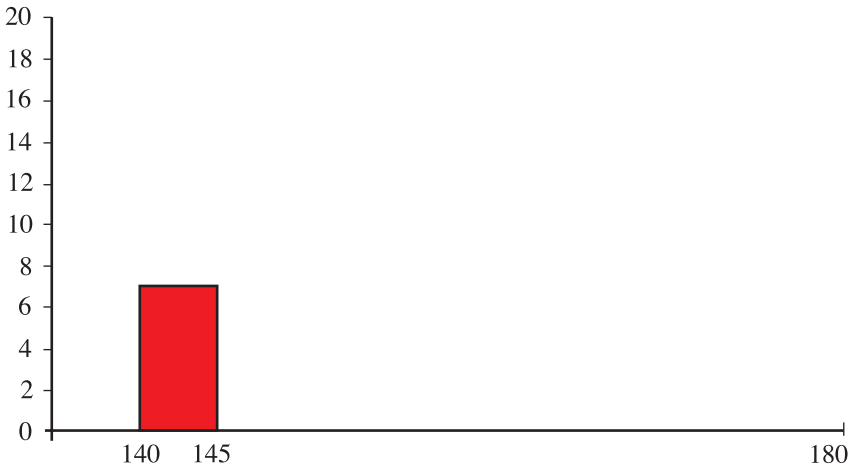
تسمّى كلّ مجموعة منها فئة.

ميزة قيمها مجمّعة في فئات تسمّى ميزة مسترسلة.

الجدول المتحصّل عليه يسمّى جدول سلسلة إحصائيّة ذات ميزة كميّة مسترسلة.

3) أذكر من خلال الجدول السابق ثلاث فئات و التكرار الموافق لكلّ منها.

لتمثيل الجدول السابق بمخطّط، رسم الأستاذ معيّنا وقام بتمثيل الفئة الأولى "من 140 إلى ما دون 145" الموافق للتّكرار " 7 تلاميذ". كما هو مبيّن بالرسم التّالي.



4) أنقل المخطط السّابق على كرّاسك ثمّ ارسم المستطيلات الموافقة لبقية الفئات.

يسمى المخّطط المتحصّل عليه : مخطّط المستطيلات .

تمثّل سلسلة إحصائيّة مسترسلة بمخطط يسمى مخطّط المستطيلات

4. مضلّع سلسلة إحصائيّة ذات ميزة كميّة مسترسلة

نشاط

يمثل الجدول التالي توزّع 60 أستاذ بمدرسة إعداديّة حسب أقدميّتهم في التدريس.

الفئات (الأقدميّة في التدريس بالسنوات)	من 5 إلى أقلّ من10	من 10 إلى أقلّ من15	من 15 إلى أقلّ من20	من 20 إلى أقلّ من25	من 25 إلى أقلّ من30	من 30 إلى أقلّ من35
التكرار(عدد الأساتذة)	6	14	16	12	10	2

1) حدّد مجموعة هذه السلسلة الإحصائيّة وميزتها

2) ارسم مخطّط المستطيلات الممثّل لهذه السلسلة الإحصائية.

3) نريد رسم مضلّع التكرارات لهذه السلسلة.

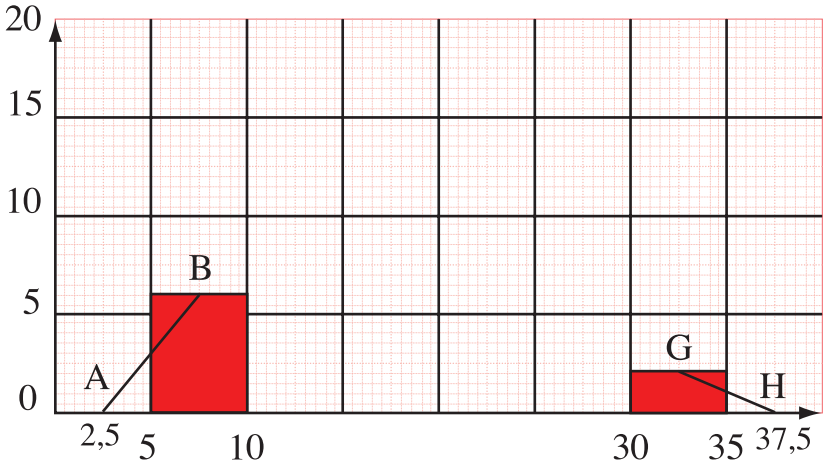
2) أ) أنقل الجدول التّالي ثمّ أكمله

الفئات	من 5 إلى أقلّ من10					من 30 إلى أقلّ من35
التكرار	6					2
مركز الفئة	$\frac{10+5}{2}=7,5$					$\frac{30+35}{2}=32,5$

مركز الفئة هو المعدّل الحسابي لطرفيها

ب) نعتبر المعيّن التّالي حيث عيّنا النقطة $B(7,5;6)$ فاصلتها هي مركز الفئة "من 5 إلى أقلّ من 10" وترتيبتها "6" وهو التكرار الموافق للفئة. وكذلك عيّنا النقطة $G(32,5;2)$ (فاصلتها هي مركز الفئة "من 30 إلى أقلّ من 35" وترتيبتها 2 التكرار الموافق للفئة).

عدد الاساتذة



الاقدمية بالتدريس

أنقله على كراسك ثمّ عيّن النقاط C و D و E و F الّتي تربط مراكز بقيّة الفئات بتكراراتها.

ج) ارسم قطع المستقيمات [BC] و [CD] و [DE] و [EF] و [FG].

ربطنا النقطة B(7,5 ;6) بالنقطة A(2,5 ;0) و كذلك النقطة G(32,5 ;2) بالنقطة H(37,5 ;0) حيث A هي مركز الفئة من 0 إلى أقلّ من 5 و تكرارها 0 وكذلك النقطة H هي مركز الفئة من 35 إلى أقلّ من 40 و تكرارها 0 الّتي نضيفهما للسلسلة.

المضلّع المتحصّل عليه ABCDEFGH يسمى: مضلّع التكرارات.

ملاحظة : تحقّق أنّ مجموع مساحة المستطيلات يساوي مساحة المضلّع ABCDEFGH لذلك يقع ربط النقطتين الأولى و الأخيرة على التّوالي بنقطتين من محور الفواصل فاصلتاهما تبعد كلّ منها عن فاصلة النقطة الموافقة لها بطول الفئة.

5. معدّل سلسلة إحصائيّة ذات ميزة كميّة مستمرّة

نشاط

قام مدير مدرسة إعداديّة بسبر للآراء لمعرفة المدّة التي يقضّيها كل تلميذ لقطع المسافة الفاصلة بين منزله والمدرسة فتحصّل على النتائج المقدّمة بالجدول التالي:

المدة بالدقيقة	من 0 إلى أقلّ من 10	من 10 إلى أقلّ من 20	من 20 إلى أقلّ من 30	من 30 إلى أقلّ من 40
مركز الفئة	5			
عدد التلاميذ	100	55	175	120

أ) أنقل الجدول على كراسك ثمّ أكمله.

ب) احسب باعتبار مراكز الفئات معدّل المدّة الزمنية (بالدّقيقة) التي يقضّيها التلاميذ بين المنزل والمدرسة.

أطبق :

1 قامت إحدى الجمعيّات بدراسة إحصائية تخصّ مجموعة من الطّلبة حول المبلغ المالي الّذي ينفقه يوميّا كل واحد منهم. فجمّعت المعلومات ونظّمتها في الجدول التالي :

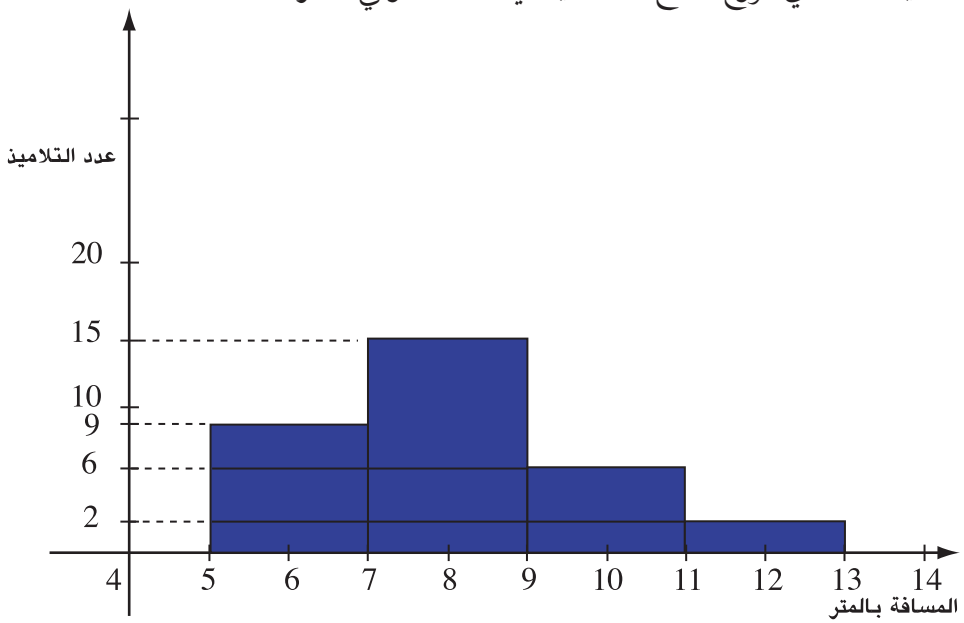
المبلغ بالدّينار	من 2 إلى أقلّ من 3	من 3 إلى أقلّ من 4	من 4 إلى أقلّ من 5	من 5 إلى أقلّ من 6	من 6 إلى أقلّ من 7
مركز الفئة					
عدد الطلبة	32	55	24	15	7
التّواتر					

1) مثّل هذه السلسلة بمخطّط المستطيلات وارسم مضلّع التكرارات.

2) ما هو المبلغ الّذي تنفقه أكبر نسبة من الطّلبة ؟

3) ما هو معدّل الإنفاق اليومي لهؤلاء الطّلبة ؟

2 يمثّل مخطّط المستطيلات التّالي توزّع نتائج 32 تلميذ في مسابقة رمي الكرة الحديديّة.



1) ما هي النتيجة التي تحصّل عليها أكبر عدد من التلاميذ ؟ ما هي النتيجة التي تحصّل عليها أصغر عدد من التلاميذ؟

2) أنقل الجدول التالي ثمّ أكمله

المسافة بالمتر	من 5 إلى أقلّ من 7	من 7 إلى أقلّ من 9	من 9 إلى أقلّ من 11	من 11 إلى أقلّ من 13
عدد التلاميذ				
مركز الفئة				
التواتر				

3) ما هو معدّل النّتائج الّتي تحصّل عليها التّلاميذ؟

4) مثّل هذه السلسلة بمضلّع التواتر.

3 تتوزّع أجور موظّفي شركة على النحو التّالي:

الأجور بالدّينار	من 400 إلى أقلّ 500	من 500 إلى أقلّ 600	من 600 إلى أقلّ 700	من 700 إلى أقلّ 800
عدد الموظّفين	30	45	60	25

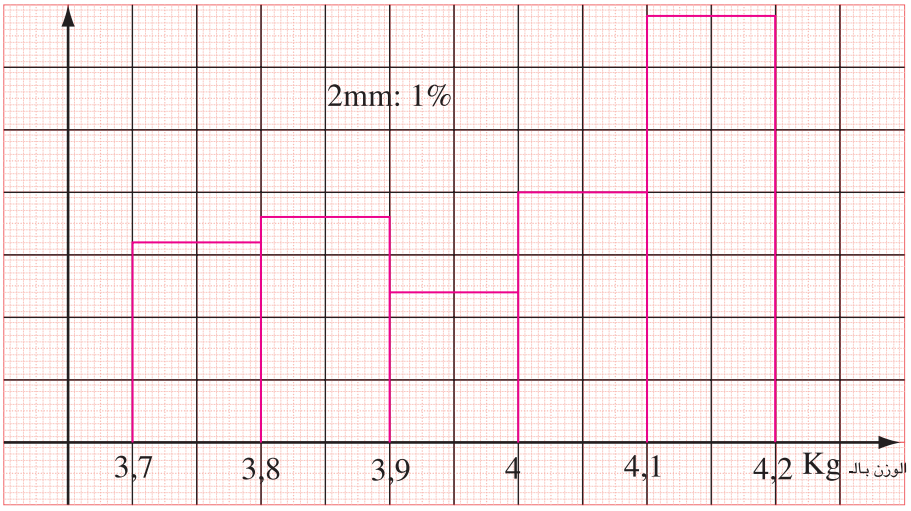
1) حدّد التكرار الجملي لهذه السلسلة واذكر ميزتها.

2) جد معدّل أجور موظّفي هذه الشركة .

3) ارسم مضلّع التواتر لهذه السلسلة.

4) ما هي النسبة المائوية للموظفين الذين أجورهم "من 500 إلى أقلّ من 700 دينارا".

4 وقع وزن 2500 ديك رومي وتحصّلنا على مخطّط المستطيلات التّالي:



1) ضع جدولا يظهر عدد الديكة والتواتر (بالنسبة المائويّة) بالنسبة لكلّ فئة وزن

2) أرسم مضلّع التواتر

3) ما هو معدّل وزن الدّيكة

II. أمثلة لظواهر عشوائية

نشاط 1 1) يحتوي كيس على 3 قريصات حمراء و 3 قريصات زرقاء.

قام محمد بسحب قريص من الكيس بطريقة عشوائية .سجّل لونه ثمّ أرجعه داخل الكيس ثمّ كرّر التجربة 24 مرّة فتحصّل على النتائج التالية :

أزرق	أزرق	أحمر	أزرق	أحمر	أحمر
أزرق	أزرق	أحمر	أزرق	أزرق	أحمر
أحمر	أزرق	أزرق	أحمر	أحمر	أحمر
أزرق	أحمر	أحمر	أزرق	أزرق	أحمر

نقول عن تجربة أنّها عشوائيّة عندما لا يمكن أن نجزم بصفة قطعيّة نتيجة التّجربة قبل ظهورها

حوصل النتائج التي تحصلّ عليها محمد في الجدول التالي:

	سحب القريص الأحمر	سحب القريص الأزرق
عدد المرّات		
التواتر بالنّسبة المائويّة		

أنقله على كرّاسك ثم أكمله

2) هل يمكن أن نقول أنّ 50% من السحب أظهر القريص الأحمر ؟

3) ما هو تواتر ظهور القريص الأزرق ؟

4) كرّر محمد التجربة 40 مرّة فتحصل على النتائج التالية :

أزرق	أزرق	أحمر	أزرق	أحمر	أحمر
أحمر	أزرق	أحمر	أزرق	أزرق	أحمر
أزرق	أزرق	أزرق	أحمر	أحمر	أحمر
أحمر	أحمر	أحمر	أزرق	أزرق	أزرق
أزرق	أحمر	أحمر	أزرق	أحمر	أحمر
أزرق	أحمر	أحمر	أزرق	أزرق	أحمر
أحمر	أزرق	أزرق	أحمر		

أ) انقل الجدول التالي على كراسك ثم اكمله .

	سحب القريص الأحمر	سحب القريص الأزرق
عدد المرّات		
التواتر بالنّسبة المائويّة		

ب) هل تمّ سحب القريص الأحمر في أكثر من 50% من التجارب ؟

5) قام أحد أصدقائه بهذه التجربة 40 مرّة لكنّه توقّف عند التجربة رقم 25 و قال"لو واصلت عمليّة السّحب لأصبح تواتر ظهور القريص الأحمر أكبر من تواتر ظهور القريص الأزرق".

هل تشاطره الرأي ؟

نشاط 2 سحب أعداد عشوائية بواسطة الآلة الحاسبة

توفّر الآلة الحاسبة العلمية أعدادا عشوائيّة بواسطة الزر «RANDOM» أو «ALEA» أو «RAND»...

عندما نضغط على الزر «RANDOM» مرّة واحدة تتحصّل على عدد عشري محصور بين 0 و 1 وجزءه العشريّ يتشكل من ثلاثة أرقام عشوائيّة أو أكثر حسب نوع الآلة الحاسبة.

نعتبر آلة حاسبة تعرض أعدادا عشوائية بثلاثة أرقام بعد الفاصل. كرّر تلميذ التجربة 30 مرّة فتحصّل على النتائج التالية:

-193-971-630-154-932-202-353-925-147-957-989-513-410-696-847-760-046
.214-619-024-802-699-104-509-660-319-724-621-772-296

1) أ) أنقل الجدول التالي على كراسك ثمّ أكمله.

الرقم	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
عدد المرّات										
التواتر بالنسبة المائويّة										

ب) ارسم مضلّع التواترات.

2)أ) كرّر التجربة باستعمال الآلة الحاسبة 60 مرّة ثمّ حوصل النتائج في الجدول التّالي

الرقم	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
عدد المرّات										
التواتر بالنسبة المائويّة										

نسمّي عيّنة مقاسها n سلسلة إحصائيّة مشكّلة من النّتائج المتحصّل عليها عند تكرار هذه التجربة n مرّة وفي نفس الظّروف.

ب) أرسم مضلّع التواترات.

3) ماذا تلاحظ كلّما كبرت العيّنة ؟ قارن التواترات بالعدد 0.1 .

نشاط 3 ارم نردا أوجهه مرقّمة من 1 إلى 6 خمسة وعشرون مرّة وسجّل رقم الوجه العلوي بعد كلّ رمية ثمّ حوصل النتائج في الجدول التّالي

النتائج	1	2	3	4	5	6
التكرار						
التواتر بالنسبة المائوية						

أ) ارسم مضلّع التواترات.

ب) جمّع النتائج التي تحصلّت عليها مع نتائج ثلاثة من زملائك في جدول مثل الجدول السابق

ت) ارسم مضلّع التواترات

ث) ماذا تلاحظ كلما كبرت العيّنة ؟ قارن التواترات بالعدد 0.16.

نشاط 4 شاركت مجموعة من التلاميذ في مسابقة خلال برنامج تلفزي تتمثّل المسابقة في الإجابة عن السّؤال الّذي يسحبه المشارك من علبة بطريقة عشوائيّة.

نعلم أن عدد الأسئلة في الثّقافة العامّة هو 5 وعددها في التّاريخ 4 وعددها في الرّياضة 3.

أ) ما هو السؤال الأكثر احتمالا للسّحب ؟ الأقّل احتمالا للسّحب ؟

ب) ما هو احتمال سحب سؤال في التّاريخ ؟ أعط النتيجة في صيغة نسبة مائويّة ؟

ج) ما هو احتمال سحب سؤال في الثّقافة العامّة أو الرّياضة ؟

نشاط 5 نسي أيمن وعزيز وأحمد أقلامهم بالقاعة عند خروجهم من حصّة الرّياضيات. احتفظ بها أستاذهم ثمّ وزّعها عليهم بطريقة عشوائيّة في بداية الحصّة الموالية.

يمثّل الجدول التّالي إمكانيات توزيع الأقلام على التلاميذ.أنقله على كرّاسك ثمّ أكمله.

إمكانيات التّوزيع	يتسلّم أيمن	يتسلّم عزيز	يتسلّم أحمد
إمكانية أولى	قلمه	قلمه	قلمه
إمكانية ثانية	قلمه	قلم أحمد	قلم عزيز
إمكانية ثالثة	قلم عزيز	قلم أحمد	قلم أيمن

أ) ما هو عدد إمكانيات التّوزيع ؟

ب) ما هو احتمال أن يتسلّم أيمن قلمه ؟

ج) ما هو احتمال أن يتسلّم كلّ تلميذ قلمه ؟

أطبق :

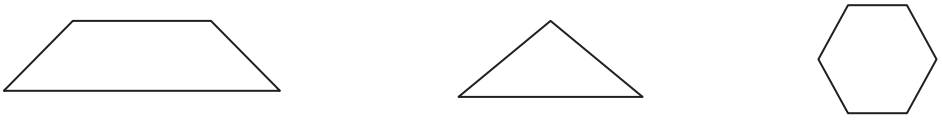
باستعمال الأرقام 1 و 2 و 3

أ) كم يوجد من عدد ذي رقمين مختلفين ؟ استعمل شجرة اختيار.

ب) كم يوجد من عدد ذي رقمين؟

ج) ما هو احتمال الحصول على عدد زوجي متكون من رقمين ؟

2 لطارق ثلاثة أقلام ملوّنة : الأزرق والأصفر والبنّي. يريد تلوين الأشكال الهندسية التّالية :



أ) أوجد باستعمال شجرة الاختيار عدد الاختيارات الممكنة للألوان إذا ما اعتبرنا أنّه يستطيع استعمال لون واحد على الأقلّ ؟

ب) ما هي الاختيارات الممكنة للألوان إذا ما اعتبرنا أنّه يستعمل ثلاثة ألوان ؟

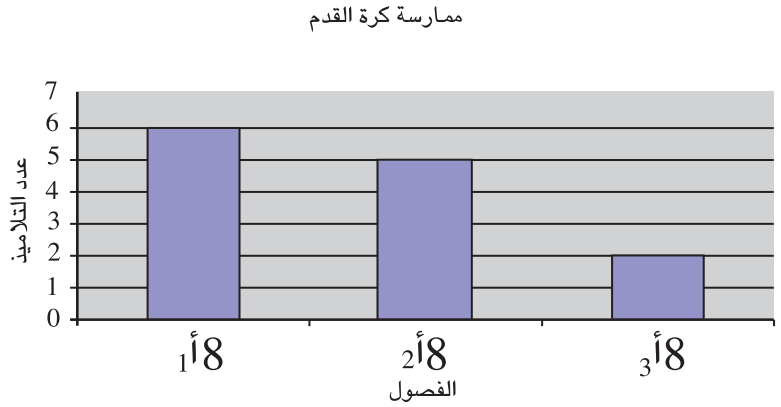
تمـــارين

1 استجوب أساتذة التربية البدنيّة تلاميذ ثلاثة فصول من الثّامنة أساسي حول النشاط الرّياضي الّذين يحبّذون ممارسته في إطار الجمعيّة الرياضية المدرسية. ثمّ حاولوا تنظيم هذه المعطيات في الوثائق الثلاث التاليّة والتي لم يتمّ إكمالها.

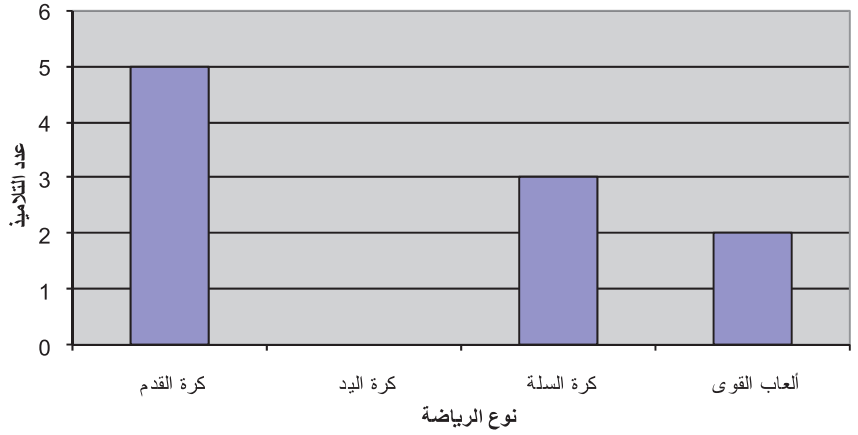
الوثيقة (1)

	كرة القدم	كرة اليد	كرة السلة	ألعاب القوى	المجموع
8 أ1		2	0		9
8 أ 2	5	0	3		
8 أ 3	2		2	1	
المجموع		10			

الوثيقة (2)



الوثيقة (3)



1) ماذا تمثّل كلّ وثيقة من الوثائق السابقة؟

2) ما هو عدد التلاميذ من 8 أ1 الذين يحبّذون ممارسة كرة القدم ؟ ما هي الوثيقة التي تدلّ على ذلك؟

3) ماذا يمثّل العدد 10 بالوثيقة (1) في وادي كرة اليد؟ أكمل المعطى الناقص بهذا الوادي.

4) ما هو عدد التلاميذ من 8 أ2 الّذين يحبّذون ممارسة ألعاب القوى في إطار الجمعيّة الرياضية؟

5) ما هو عدد التلاميذ الذين يفضلون ممارسة ألعاب القوى؟ ما هي الوثيقة الّتي تدلّ على ذلك؟

6) ما هو العدد الجملي للتلاميذ الّذين اختاروا ممارسة نشاط رياضي؟

7) أنقل الجدول بالوثيقة (1) ثمّ أكمله.

8) مثّل بمخطّط القطاع الدائري توزع التلاميذ الذين اختاروا ممارسة كرة القدم حسب الفصول.

2 يتوزّع تلاميذ مدرسة إعدادية على النحو التالي

العمر / المستوى	12 سنة	13 سنة	14 سنة	15 سنة	16 سنة	17 سنة
7 أساسي	22	76	48	4	0	0
8 أساسي	0	10	50	50	40	0
9 أساسي	0	0	6	70	36	20

1) ما هي المجموعة الإحصائية المدروسة ؟

2) ما هي الميزة المدروسة ؟ ما هي طبيعتها ؟

3) أنقل الجدول التالي ثمّ أكمله.

4) ما هو التكرار الجملي ؟

5) أعط منوال ومدى ومعدّل العمر بالنسبة إلى هذه السلسلة.

6) مثّل الجدول السابق بمخطّط العصيات

7) ما هو موسط هذه السلسلة.

العمر بالسنة	التكرار	التواتر بالنسبة المائويّة
12	22	
13		
14		
15	124	
16		
17	20	
المجموع		

3 يمثّل الجدول التالي توزّع عدد الحرفاء المرتادين على مغازة كبرى طوال أسبوع

الإثنان	الثلاثاء	الأربعاء	الخميس	الجمعة	السبت	الأحد
1920	1230	590	1230	2300	2730	3900

1) ما هو المعدّل اليومي لعدد الحرفاء ؟

2) ما هي النسبة المائوية للحرفاء يوم الأحد ؟

3) مثّل هذه السلسلة بمخطط العصيات.

4 أرقام الهاتف القارّ تبدأ بأحد رموز المناطق: 71 ، 72 ، 73 ، 74، 75 ، 76 ، 77 ، 78

قامت مؤسسة بـ 1200 مكالمة هاتفية كما هو مبيّن بالجدول التالي:

رمز المنطقة	71	72	73	74	75	76	77	78
عدد المكالمات	140	120	360	130	32	160	150	108

1) ما هو عدد المكالمات الهاتفية التي أجريت نحو الرمز 73 ؟

2) ما هي النسبة المائوية للمكالمات الهاتفية الموجّهة نحو الرمز 78 ؟

3) مثّل هذه السلسلة بمخطّط القطاع الدائري.

5 فيما يلي نتائج التحقيق الّذي قام أستاذ اللغة العربيّة في فصل يتكوّن من 10 أولاد و 17 بنتا لجمع معلومات حول عدد الكتب التي طالعها التلاميذ في ظرف شهر .

بالنّسبة إلى البنات (الجدول1)

عدد كتب المطالعة	0	1	2	أكثر من 2
عدد التلاميذ	0	2		9
التواتر بالنسبة المائوية				

(الجدول1)

بالنّسبة إلى الأولاد (الجدول2)

عدد كتب المطالعة	0	1	2	أكثر من 2
عدد التلاميذ	1	0	5	4
التواتر بالنسبة المائوية				

(الجدول2)

1) أنقل الجدولين السابقين ثمّ أكملهما.

2) جمّع المعطيات السابقة في جدول واحد.

3) أ) أحسب النسبة المائوية a للبنات اللاتي طالعن أقلّ من 3 كتب.

ب) أحسب النسبة المائوية b للذكور الذين طالعوا أقلّ من 3 كتب.

ج) أحسب النسبة المائوية c للتلاميذ الذين طالعوا أقلّ من 3 كتب.

د) هل أنّ c تمثّل المعدّل الحسابي لـ a و b ؟لماذا ؟

6 طلب الأستاذ من أحمد أن يجمع معلومات من زملاءه بالمدرسة حول الزمن الذي يقضيه يوميا كلّ تلميذ أمام الحاسوب فنظّم المعطيات التي استقاها منهم وقدّمها في الجدول التالي:

الزمن بالدقيقة	**من 0 إلى أقلّ من 30**	**من 30 إلى أقلّ من 60**	**من 60 إلى أقلّ من 90**	**من 90 إلى أقلّ من 120**
عدد التلاميذ	130	100	50	20
التواتر بالنسب المائوية				

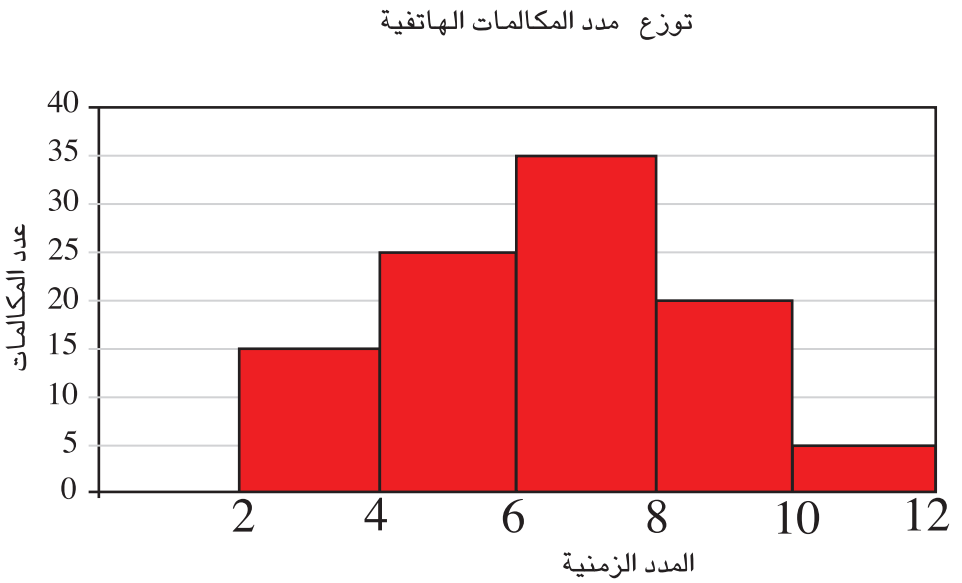
1) أنقل الجدول السابق ثمّ أكمله.

2) مثّل هذه السلسلة بمضلع التواترات.

3) ما هي نسبة التّلاميذ من هذه المدرسة الّذين يقضّون من 30 إلى 90 دقيقة أمام الحاسوب ؟

4) ما هو معدّل الزّمن الذي يقضّيه تلاميذ هذه المدرسة أمام الحاسوب ؟

7 يمثل مخطّط المستطيلات التالي توزّع مدد المكالمات الهاتفيّة بموزّع الخطوط الهاتفيّة.



1) ما هي المدّة الزمنيّة لأكبر عدد من المكالمات الهاتفيّة.

2) أنقل الجدول التالي ثمّ أكمله.

المدد بالدقيقة	**من 2 إلى أقلّ من 4**	**من 4 إلى أقلّ من 6**	**من 6 إلى أقلّ من 8**	**من 8 إلى أقلّ من 10**	**من 10 إلى أقلّ من 12**
عدد المكالمات					
التواترات					

3) مثّل هذه السلسلة بمضلّع التواترات.

4) ما هو معدّل مدد المكالمات الهاتفيّة.

8 قامت منظّمة الدفاع عن المستهلك بتسجيل سعر البيع لنفس الجهاز الكهرومنزلي في 80 مغازة.

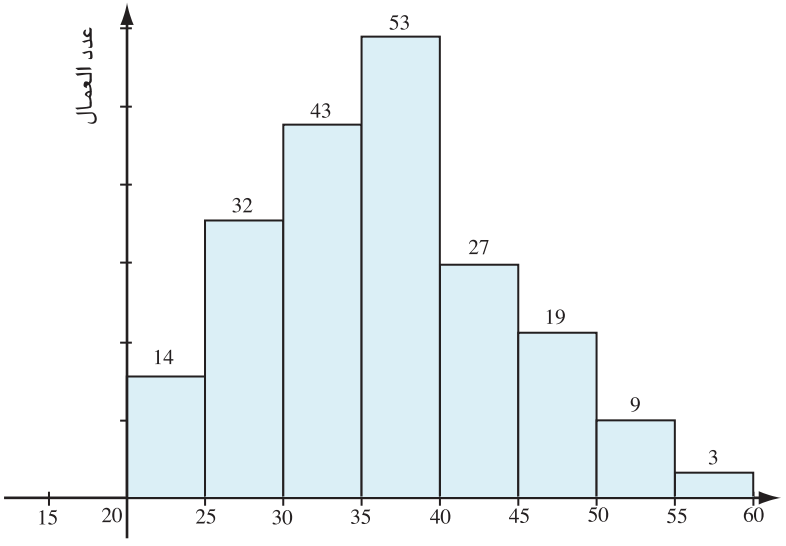
السّعر بالدينار	من 300 إلى أقلّ من 310	من 310 إلى أقلّ من 320	من 320 إلى أقلّ من 330	من 330 إلى أقلّ من 340	من 340 إلى أقلّ من 350
عدد المغازات	10	20	25	15	10

1) مثّل هذه المعطيات بمخطّط المستطيلات.

2) ما هو عدد المغازات التي بها السّعر أكثر ارتفاعا؟ أقلّ ارتفاعا ؟

3) ما هو معدّل الأسعار.

9 يمثّل مخطّط المستطيلات التّالي توزّع عمّال شركة حسب أعمارهم



1) أكمل الجدول التّالي :

العمر بالسنة	من 20 إلى أقلّ من 25	من 25 إلى أقلّ من 30	من 30 إلى أقلّ من 35	من 35 إلى أقلّ من 40	من 40 إلى أقلّ من 45	من 45 إلى أقلّ من 50	من 55 إلى أقلّ من 60	من 60 إلى أقلّ من 75
عدد العمّال								

2) ما هو التكرار الجملي لهذه السلسلة ؟

3) ما هو معدّل الأعمار بالنّسبة لعمّال الشركة ؟

4) انقل المخطّط ثمّ ارسم عليه مضلّع التكرارات ؟

10 قامت اللجنة المنظّمة لمسابقة صيد الأسماك بوزن كمّية السّمك الّتي اصطادها كلّ مشارك ثمّ قدّمت النتائج في الجدول التالي:

الوزن بالكيلوغرام	من 0 إلى أقلّ من 0,5	من 0,5 إلى أقلّ من 1	من 1 إلى أقلّ من 1,5	من 1,5 إلى أقلّ من 2	من 2 إلى أقلّ من 2,5
عدد الصيادين	20	10	6	1	3

1) ما هو التكرار الجملي لهذه السلسلة ؟

2) ما هو معدّل وزن السمك الموافق للمشارك الواحد ؟

3) مثّل هذه السلسلة بمخطّط المستطيلات

4) ما هو عدد المشتركين الذين اصطادوا أكثر من 1500 غرام ؟

5) ما هو عدد المشاركين الذين اصطادوا أقلّ من 1000 غرام ؟

11 نريد تكوين لجنة من شخصين من بين ثلاثة رجال وامرأتين.

أ) كم طريقة تمكّن من تشكيل هذه اللجنة؟

ب) ما هو احتمال أن تكون اللجنة مركّبة من رجلين؟

ج) ما هو احتمال أن تكون اللجنة مركّبة من امرأتين؟

د) استنتج احتمال أن تكون اللجنة مكوّنة من رجل وامرأة.

12 تعرض مؤسّسة تربوية على تلاميذها اختيار المشاركة في النوادي الثقافية من بين الأربع نوادي التالية

ن1: الموسيقى ن2: الرقص ن3: المسرح ن4: الشعر

ما هو عدد الاختيارات الممكنة بالنسبة إلى التلميذ الواحد إذا ما سُمح له بالمشاركة في ناديين فقط؟

في 3 نوادي على أقصى تقدير؟

13 يعرض مطعم على حرفائه 3 أصناف من التحليّة.

1) أحسب عدد الاختيارات الممكنة إذا ما اعتبرنا أنّ الحريف عليه أن يختار صنفا واحدا فقط؟

2) استعمل شجرة اختيار واحسب عدد الاختيارات الممكنة إذا ما اعتبرنا أنّه يمكن أن يختار أكثر من صنف؟

التناظر المركزي

I التناظر المركزي

II خاصيات التناظر المركزي

III مركز تناظر أشكال هندسية

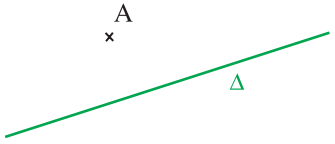
IV التناظر و التعيين:

التناظر المركزي

استحضـــر

1 أنقل الرسم على كراسك ثمّ أنجز البناء المطلوب

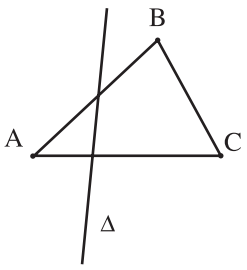
في كلّ حالة من الحالات التالية :



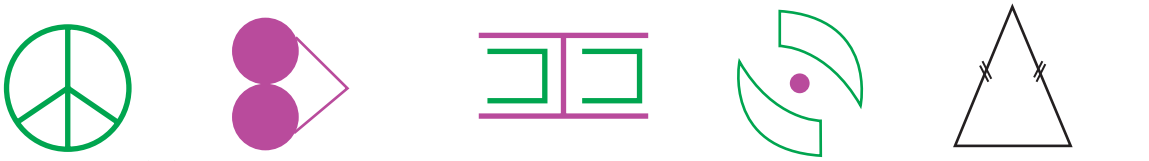
أ) ابن النقطة A' مناظرة النقطة A بالنسبة إلى المستقيم Δ .

ب) A و B نقطتان متناظرتان بالنسبة إلى مستقيم Δ . ابن Δ .

ج) ابن المثلث $A'B'C'$ مناظر المثلث ABC بالنسبة إلى المستقيم Δ .

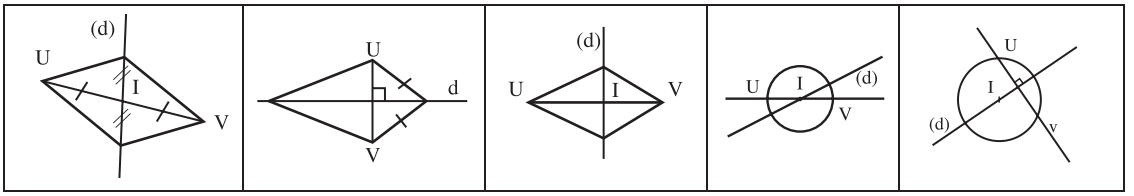


2 أ) ما هو الشكل الذي له محور تناظر أو أكثر ؟



(أ) (ب) (ج) (د) (هـ)

ب) في أيّ شكل من الأشكال التالية النقطتان U و V متناظرتان بالنسبة إلى المستقيم (d) ؟



(أ) (ب) (ج) (د) (هـ)

3 A و B نقطتان متناظرتان بالنسبة لمستقيم (d).

أنقل الجدول التالي على كراسك ثمّ أجب بـ صحيحً أوً خطأً في الخانة المقابلة.

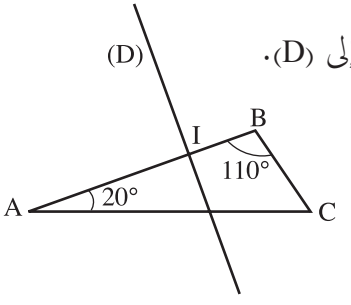
.1	B هي مناظرة النقطة A بالتناظر المحوري محوره (d)	
.2	المستقيم (d) يوازي (AB)	
.3	المستقيم (d) عمودي على (AB)	
.4	المستقيم (d) يقطع $[AB]$ في منتصفها	
.5	A و B من نفس الجهة بالنسبة إلى (d)	

ليكن Δ مستقيما و M نقطة من المستوي لا تنتمي إلى المستقيم Δ .

تكون النقطة M' مناظرة للنقطة M بالنسبة إلى المستقيم Δ إذا كان المستقيم Δ هو الموسط العمودي للقطعة $[MM']$

إذا كانت M تنتمي إلى المستقيم Δ فهي مناظرة نفسها.

4 في الشكل المقابل ABC مثلّث و (D) مستقيم



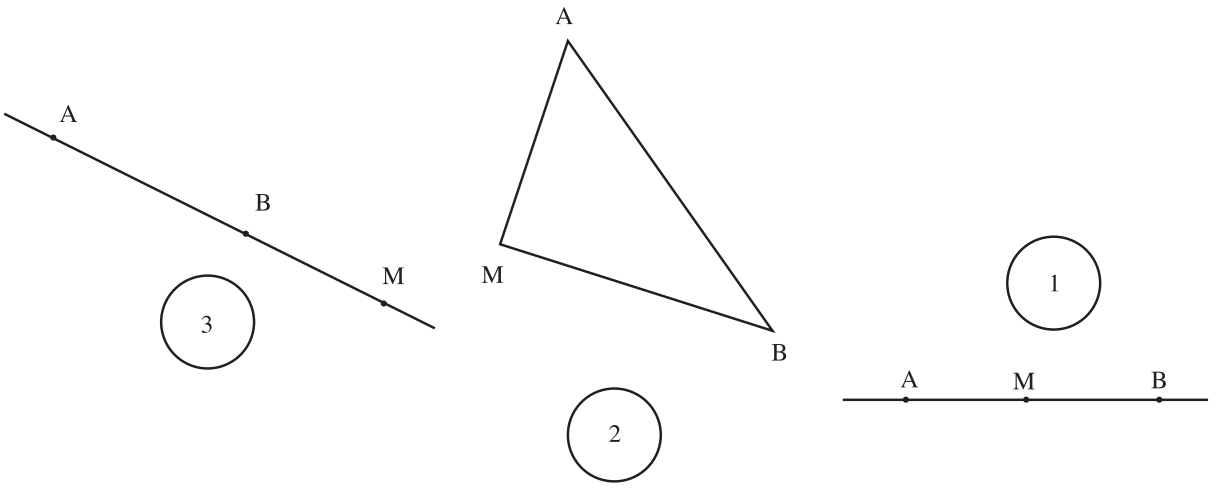
أ) نعتبر A' و B' مناظراتي النقطتين A وB على التوالي بالنسبة إلى (D).

بيّن أنّ I و A' و B' على استقامة واحدة.

ب) نعتبر C' مناظرة النقطة C بالنسبة إلى (D).

حدّد قيس الزاوية $\widehat{A'B'C'}$.

5 أ) قارن AB و AM+MB في كلّ حالة من الحالات التالسية :

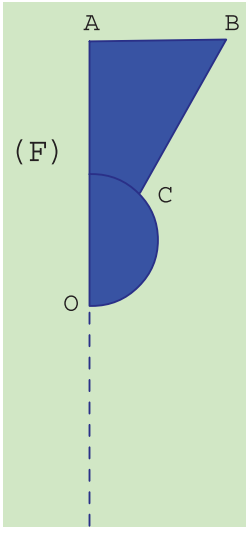


ب) في أيّ وضعيّة من الوضعيّات السّابقة تحقّق النّقطة M المساواة AM+MB=AB ؟

أستكشف وأطبّق :

I التناظر المركزي

نشاط 1



1) أنقل الرسم (F) على ورق شفاف ثمّ على كرّاسك.

– ضع الورق الشفاف على كراسك بحيث ينطبق الرسمان .

– ثبّت شوكة البركار على النقطة O.

– قم بتدوير الورق الشفاف نصف دورة (سوف تلاحظ أنّ الخطّين المتقطعين محمولان على نفس المستقيم) وارسم الشكل المتحصّل عليه (F').

نقول أنّ الشكل (F') مناظر للشكل (F) بالنسبة إلى النقطة O

أو

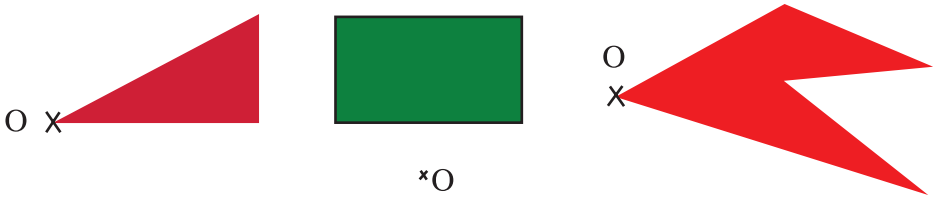
أنّ الشكل (F') هو مناظر الشكل (F) بالتناظر المركزي الّذي مركزه O.

2) حدّد على الشكل (' F) النقاط 'A و 'B و 'C الموافقة على التوالي للنقاط A و B و C .

ب) ماذا تمثّل النقطة O بالنسبة إلى كلّ من قطع المستقيمات ['AA] و['BB] و ['CC]؟

نقول أنّ النقطة 'A مناظرة النقطة A بالنسبة للنقطة O إذا كانت O منتصف قطعة المستقيم ['AA].

نشاط 2 أ) أنقل الأشكال التالية على كراسك

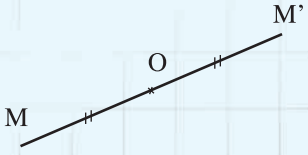


ب) أرسم في كلّ حالة من الحالات التالية مناظر الشكل المرسوم بالنسبة إلى النقطة O.

نعتبر نقطة O من المستوي

- لتكن M نقطة مخالفة للنقطة O.

مناظرة النقطة M بالنسبة لـ O هي النقطة 'M التي تحقق O منتصف قطعة المستقيم ['MM].

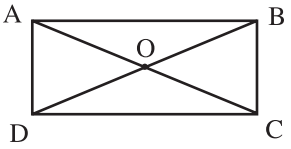


- مناظرة النقطة O بالنسبة للنقطة O هي نفسها.

مصطلحات وكتابة :

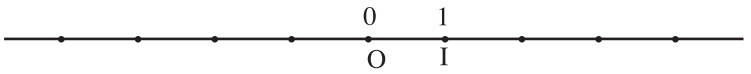
- التناظر بالنسبة للنقطة O يسمّى تناظر مركزي
- نسمّي النقطة O مركز التناظر.
- عندما تكون نقطتان M و 'M متناظرتين بالنسبة لـ O نقول أنّ كلاّ منهما مناظرة للأخرى بالتناظر المركزي.

1 لاحظ الرسم التالي و حدّد مناظرات النقاط A و B و C و D بالنسبة إلى O .



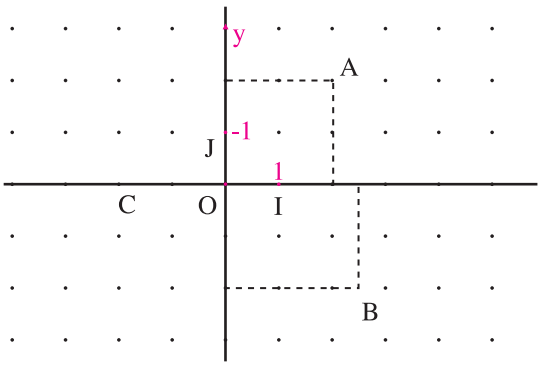
2 أ) أرسم نقطتين O و A . أرسم الدائرة C التي مركزها O و شعاعها OA.
نصف المستقيم [AO] و C يتقاطعان في نقطة ثانية A' .
ب) بيّن أنّ A و A' متناظرتان بالنسبة إلى O.

3 أنقل على كراسك المستقيم المدرج التالي:



أ) عيّن النقاط A و B و C و D و E التي فاصلاتها على التوالي 2 ، 3 ، 3- ، 4 ، 5
ب) حدّد مناظرة النقطة B بالنسبة إلى O و مناظرة النقطة D بالنسبة إلى B
ج) أنقل ثمّ أتمم بما يناسب :- مناظرة النقطة E بالنسبة إلى I هي ..
- النقطتان O و D متناظرتان بالنسبة إلى ....

4 أنقل الرسم التالي :



ما هي إحداثيات كلّ من النقاط A و B و C ؟
عيّن النقاط A' و B' و C' مناظرات
النقاط A و B و C على التوالي بالنسبة إلى O.
ج) ما هي إحدثيات النقاط A' و B' و C'.

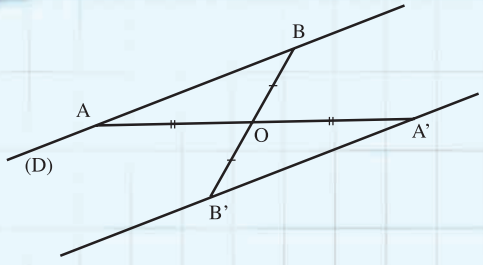
II خاصيات التناظر المركزي

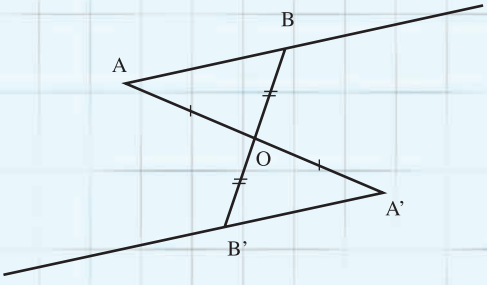
1 مناظر مستقيم – نصف مستقيم – المحافظة على الإستقامة:

نشاط 1 1) أرسم مستقيما (D) و نقطة O لا تنتمي إليه.

- عيّن نقطتين A و B من (D) .
- أرسم مناظرتيهما A' و B' على التوالي بالنسبة إلى O و المستقيم (A'B').
- خذ ورقة شفافة و ثبّتها بواسطة شوكة البركار في النقطة O ثمّ أنقل عليها المستقيم (AB)
- أدر الورقة الشفافة حتى تنطبق النقطة A على النقطة A' و لاحظ أن (AB) قد انطبق على (A'B') أي أنّ مناظر المستقيم (AB) بالنسبة إلى O هو المستقيم (A'B')
- حقّق أنّ المستقيمين (AB) و (A'B') متوازيان

2) ما هو مناظر نصف المستقيم [AB] بالنسبة إلى O ؟





لتكن O نقطة من المستوي.

- **مناظر مستقيم بالنسبة إلى O هو مستقيم موازٍ له.**
- **إذا كانت A و B نقطتان مختلفتان و A' و B' مناظرتيهما على التوالي بالنسبة إلى O فإنّ المستقيم (A'B') مناظر المستقيم (AB) بالنسبة إلى O ولدينا (A'B') موازٍ لـ (AB)**
- **نصف المستقيم [A'B') هو مناظر نصف المستقيم [AB] بالنسبة إلى O**

أطبق :

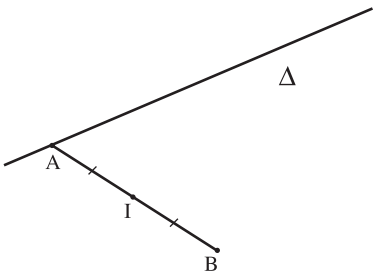
1 أ) أرسم مستقيما Δ و نقطتين مختلفتين A و B لاتنتميان إلى Δ .

ب) ابن المستقيم Δ' مناظر Δ بالنسبة إلى A و Δ" مناظر Δ بالنسبة إلى B

ج) أثبت أنّ Δ' و Δ" متوازيان.

2 أنقل الرسم المقابل على كراسك

ابن مناظر المستقيم Δ بالنسبة إلى I



3 ابن متوازي الأضلاع EFGH و لتكن النقطة O مركزه.

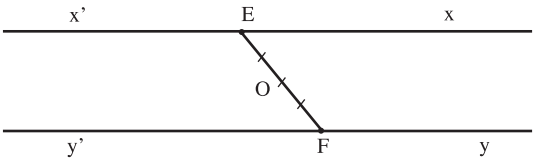
أنقل وأتمم بما يناسب:

مناظر المستقيم (EF) بالنسبة إلى O هو المستقيم .....

مناظر المستقيم .....بالنسبة إلى O هو المستقيم (EH)

4 لاحظ الشكل التالي حيث ('xx) و ('yy)

مستقيمان متوازيان



ما هو مناظر كلّ من [Ex] و [Fy] و [EF]

بالنسبة إلى النقطة O.

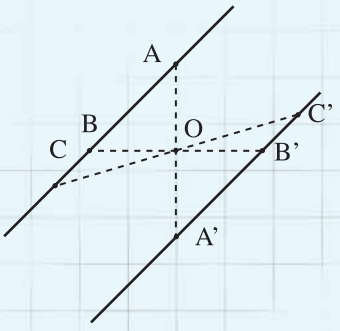
نشاط 2 أ) أرسم ثلاث نقاط A و B و C على استقامة واحدة ونقطة O.

ب) ابن النقاط A' و B' و C' مناظرات A و B و C على التوالي بالنسبة إلى O.

ج) أثبت أنّ A' و B' و C' على استقامة واحدة .

مناظرات ثلاث نقاط على استقامة واحدة بتناظر مركزي هي ثلاث نقاط على استقامة واحدة .

التناظر المركزي يحافظ على الإستقامة.



أطبق :

1 أرسم ثلاث نقاط A و B و C على استقامة واحدة وعيّن النقطة O منتصف [AB].

نعتبر النقطة D مناظرة النقطة C بالنسبة للنقطة O.

بين أن النقطة D تنتمي إلى المستقيم (AB).

2 أرسم مثلّثا ABC و عيّن النقطة O منتصف [BC]

ابن النقطة D مناظرة النقطة A بالنسبة إلى النقطة O

عيّن M نقطة من [AB]. المستقيم (OM) يقطع (CD) في النقطة N

بيّن أنّ النقطة N هي مناظرة النقطة M بالنسبة إلى النقطة O.

2 المحافظة على البعد- مناظرة قطعة مستقيم- المحافظة على المنتصف.

نشاط 1 لتكن O نقطة من المستوي

1)عيّن نقطتين A و B حيث O و A و B ليست على استقامة واحدة.

أ) ابن النقطتين A' و B' مناظرتي A و B على التوالي بالنسبة إلى O.

ب) ما هو مناظر كلّ من (AB) و (A'B') بالنسبة إلى O؟

ج) أثبت أنّ الرباعي ABA'B' متوازي الأضلاع.

د) استنتج أنّ A'B' = AB.

2) عين نقطة C من المستقيم (OA) مخالفة لـ O و A وابن مناظرتها C' بالنسبة لـ O

قارن AC و A'C'.

لتكن O نقطة من المستوي

إذا كانت A و B نقطتين من المستوي و A' و B' مناظرتي النقطتين A و B على التوالي بالنسبة إلى O فإنّ A'B' = AB.

التناظر المركزي يحافظ على البعد.

نشاط 2 أ) أرسم قطعة مستقيم [AB] و نقطة O .

ب) ابن النقطتين A' و B' مناظرتي A و B على التوالي بالنسبة إلى النقطة O

ج) أرسم القطعة [A'B'] .

د) لتكن M نقطة من [AB] و M' مناظرتها بالنسبة إلى O . قارن بين AM+MB و AB ثمّ قارن بين A'M'+M'B' و A'B'

استنتج أنّ M' تنتمي إلى [A'B'].

هـ) لتكن N' نقطة من[A'B'] و N نقطة من المستوي بحيث N' مناظرتها بالنسبة إلى O .

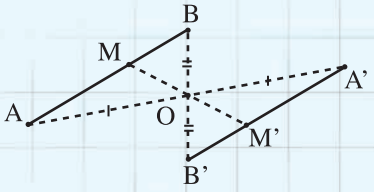
بيّن أنّ N تنتمي إلى [AB]

و) استنتج مناظر قطعة المستقيم [AB] بالنسبة إلى O.

لتكن O نقطة من المستوي.

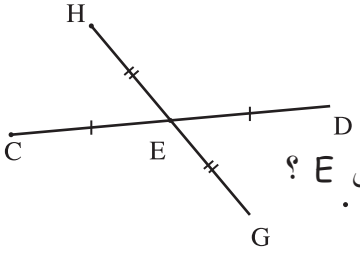
مناظر قطعة مستقيم بالنسبة إلى O هي قطعة مستقيم مقايسة لها

إذا كانت نقطتان A' و B' مناظرتي نقطتين A و B على التوالي بالنسبة إلى O فإنّ قطعة المستقيم [A'B'] هي مناظرة القطعة [AB] بالنسبة إلى O.



أطبق :

1 لاحظ الشكل المقابل



ما هو مناظر كلّ من [CD] و [HC] و [GH] و [CG] بالنسبة إلى E ؟

2 أرسم قطعة مستقيم [FG] .

أ) ابن النقطة F' مناظرة F بالنسبة إلى G و النقطة G' مناظرة G بالنسبة إلى F

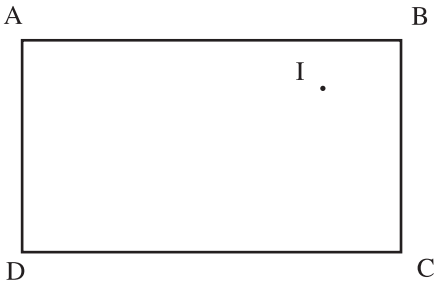
ب) بيّن أنّ FG' = GF'

3 ليكن ABC مثلثا و A' و B' و C' منتصفات القطع [BC] و [AC] و [AB] على التوالي

أ) ابن النقطتين A" و C" بحيث A" مناظرة B' بالنسبة إلى A' و C" مناظرة B' بالنسبة إلى C'

ب) ما هي طبيعة الرباعي AB'BC" ؟

ج) أثبت أنّ النقطة B منتصف قطعة المستقيم [A"C"]



4 أ) أنقل الرسم التالي على كراسك ABCD مستطيل بعداه AB=5 cm و AD=3cm و نقطة I من المستوي.

ب) ابن الرباعي EFGH مناظر المستطيل ABCD بالنسبة إلى النقطة I. ما هي طبيعته ؟ حدّد محيطه و مساحته.

نشاط 3 أ) انقل الرسم المقابل على كرّاسك حيث I منتصف القطعة [MN] و O نقطة من المستوي .

ب) ابن النقاط M' و N' و I' مناظرات M و N و I على التوالي بالنسبة إلى O

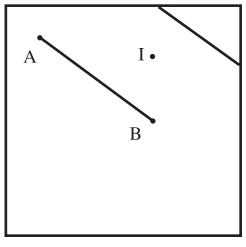
ج) بيّن أنّ النقطة I' منتصف القطعة [M'N']

التناظر المركزي يحافظ على المنتصف.

أطبق :

1 رسمنا قطعة المستقيم [AB] وجزءا من مناظرتها [A'B'] بالنسبة إلى النقطة I كما هو مبيّن بالشكل المقابل.

أنقل الشكل وابن بالمسطرة والبركار منتصف القطعة [A'B']



2 1) أ) أرسم متوازي أضلاع $ABCD$ و عيّن مركزه O.

ب) ابن النقطة B' مناظرة B بالنسبة إلى C

2) المستقيم (OB') يقطع (AD) في النقطة D'

أ) بيّن أنّ B' و D' متناظرتان بالنسبة إلى O

ب) استنتج أنّ النقطة A منتصف القطعة $[DD']$

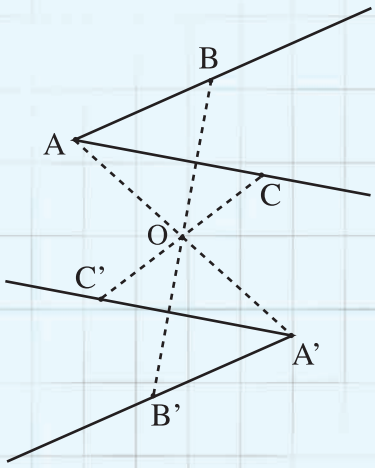
3 مناظرة زاوية

نشاط 3 أ) أرسم زاوية $\widehat{BAC}$ و نقطة O

ب) ابن النقاط A' و B' و C' مناظرات النقاط A و B و C على التوالي بالنسبة إلى O

ج) أرسم نصفي المستقيم $[A'B')$ و $[A'C')$

د) تحقّق بواسطة الورقة الشفافة من أنّ مناظر الزاوية $\widehat{BAC}$ بالنسبة إلى O هي الزاوية $\widehat{B'A'C'}$ وتحقّق أنّ $\widehat{B'A'C'} = \widehat{BAC}$.



- مناظر زاوية بالنسبة إلى نقطة من المستوي هي زاوية مقايسة لها . التناظر المركزي يحافظ على أقيسة الزوايا.
- لتكن O نقطة من المستوي. إذا كانت A و B و C ثلاث نقاط مختلفة من المستوي و A' و B' و C' مناظراتها على التوالي بالنسبة إلى O فإنّ مناظرة الزاوية $\widehat{BAC}$ هي الزاوية $\widehat{B'A'C'}$

أطبق :

1 أ) ارسم المثلّث ABC حيث $\widehat{ABC} = 80°$ و $\widehat{ACB} = 40°$ و BC= 4cm

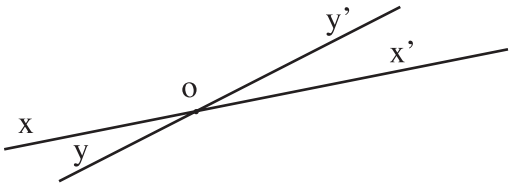
ب) لتكن النقطة I منتصف [AC]. ابن النقطة D مناظرة B بالنسبة إلى I. أحسب $\widehat{BAC}$.

ج) حدّد مناظرة كلّ زاوية من الزوايا التالية بالنسبة إلى I : $\widehat{BAC}$ و $\widehat{ABC}$ و $\widehat{BAD}$.

أحسب قيس كلّ منها.

د) عيّن نقطة M تنتمي إلى (BC) و لا تنتمي إلى [BC] ثمّ أحسب $\widehat{DCM}$.

2 تأمّل الرسم المقابل حيث $\widehat{XOY}$ و $\widehat{X'OY'}$



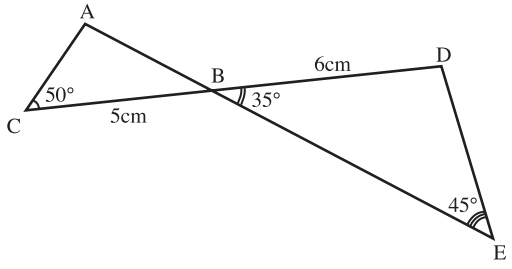
زاويتان متقابلتان بالرأس.

أ- ما هي مناظرة الزاوية $\widehat{XOY}$ بالنسبة إلى O ؟

ب - ماذا تستنتج ؟

ج- إذا كان $\widehat{XOY} + \widehat{X'OY'} = 90°$ أحسب $\widehat{XOY'}$

3 أنقل الشكل المقابل على كراسك .



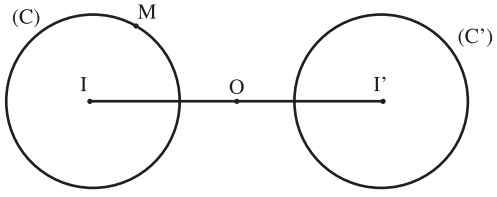
ابن النقاط P و Q و R و S مناظرة النقاط

A و C و D و E بالنسبة إلى النقطة B.

أحسب قيس الزاويتين $\widehat{RSA}$ و $\widehat{QPB}$.

4 مناظر دائرة

نشاط 3 في الشكل المقابل (C) و (C') دائرتان لهما نفس الشعاع



و النقطة O منتصف [II'].

1) أنقل الشكل على كراسك

2) لتكن M نقطة من (C)

أ) ابن النقطة M' مناظرة M بالنسبة إلى O .

ب) أثبت أنّ MIM'I' متوازي الأضلاع.

ج) استنتج أنّ M' تنتمي إلى (C').

3) لتكن N' نقطة من (C').

أ) ابن النقطة N بحيث تكون النقطة N' مناظرة N بالنسبة إلى O.

ب) أثبت أنّ N تنتمي إلى (C).

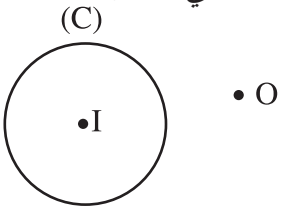
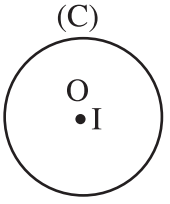
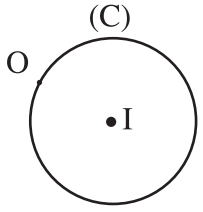
- نقول أنّ الدائرتين (C) و (C') متناظرتان بالنسبة إلى O
- مناظرة دائرة بالنسبة إلى نقطة من المستوي هي دائرة مقايسة لها.

مناظرة دائرة (C) مركزها I بالنسبة إلى نقطة O هي دائرة (C')
لها نفس الشعاع و مركزها I' مناظرة I بالنسبة إلى نقطة O.

أطبق :

1 أرسم دائرة (C) مركزها I.

أرسم الدائرة (C') مناظرة (C) بالنسبة إلى نقطة O في كلّ حالة من الحالات التالية :

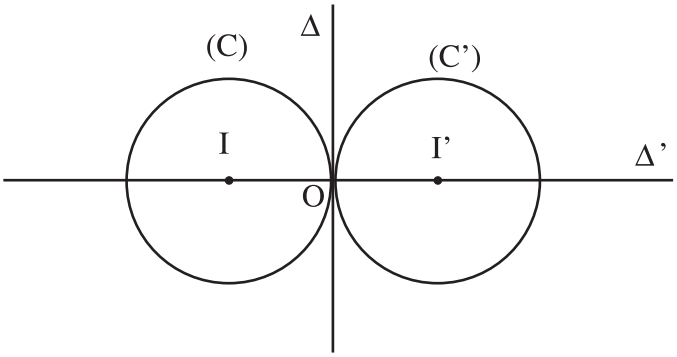
I و O مختلفان و O لا تنتمي للدائرة	I و O متطابقان	O ∈ (C)
		

2 أ) أرسم ثلاث دوائر لها نفس المركز O .

ب) أرسم مثلثا MNP بحيث يكون كل رأس على دائرة .

ج) ابن ،و باستعمال المسطرة فقط، المثلّث M'N'P' المناظر للمثلث MNP بالنسبة للنقطة O.

3 لاحظ الرسم المقابل حيث الدائرتان (C) و (C') متقايستان و متماستان في النقطة O



أنقل ما يلي و أتمم الفراغ بما يناسب :

مناظرة النقطة I بالنسبة إلى O هي .....

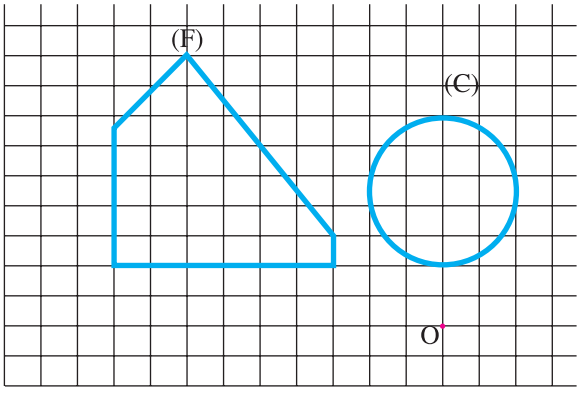
مناظرة الدائرة (C) بالنسبة إلى Δ هي .....

مناظرة الدائرة (C') بالنسبة إلى Δ' هي .....

مناظرة الدائرة (C) بالنسبة إلى O هي ....

5 المحافظة على المساحات

نشاط



أ) انقل الرسم المقابل على كراسك

ثمّ ابن (C') و (F')

مناظرتي (C) و (F) على التوالي بالنسبة إلى O

ب) قارن بين مساحتي (C) و (C')

ثمّ قارن مساحتي (F) و (F').

شكلان هندسيان (E) و(E') متناظران بالنسبة إلى نقطة O هما متطابقان إذن لهما نفس المساحة.

أطبق :

1 أرسم مثلثا ABC قائم الزاوية في A حيث AB = 3cm و AC = 5cm

ابن النقطتين D و E مناظرتي النقطتين B و C على التوالي بالنسبة إلى A.

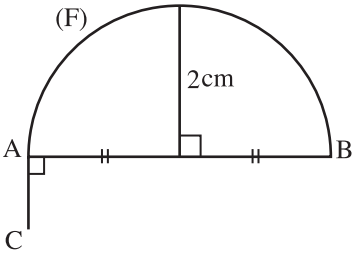
قارن أضلاع المثلثات ADE و ADC و ABE.

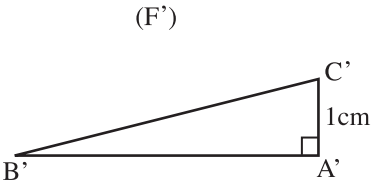
ما هي مساحة المثلث ABC ؟

استنتج مساحة الرباعي BCDE.

2 أ) أنقل الرسم التالي على كراسك و أتممه بحيث يكون الشكلان (F) و (F') متناظرين بالنسبة إلى النقطة I

ب) أحسب مساحة كلّ من الشكلين (F) و (F').





I

III مركز تناظر أشكال هندسية

نشاط

أ) أنقل الشكل F على كراسك.

لاحظ أنّ مناظرة النقطة B بالنسبة إلى O

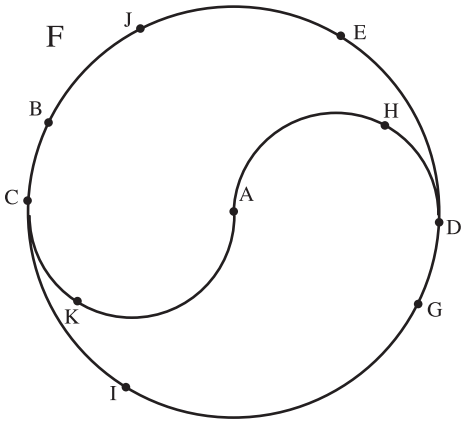
هي النقطة G التي تنتمي إلى F

ب) هل أنّ نفس الملاحظة تنطبق على النقاط الأخرى

ومناظراتها بالنسبة إلى O ؟

ج) عيّن نقاط أخرى على F وابن مناظراتها بالنسبة إلى O .

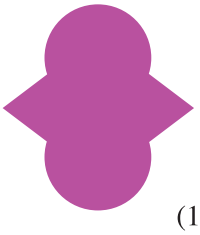
د) ماذا تستنتج ؟



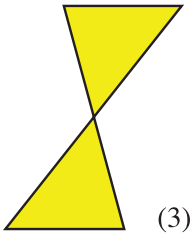
تمثّل نقطة O مركز تناظر شكل هندسي إذا انطبق هذا الشكل مع مناظره بالنسبة إلى النقطة O

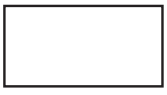
أطبق :

من بين الأشكال التالية : ما هي التي لها مركز تناظر ؟ حدّده.


(1)

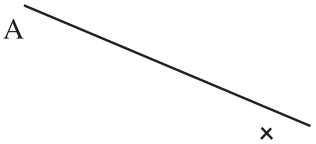
(2)


(3)


(4)

(5)

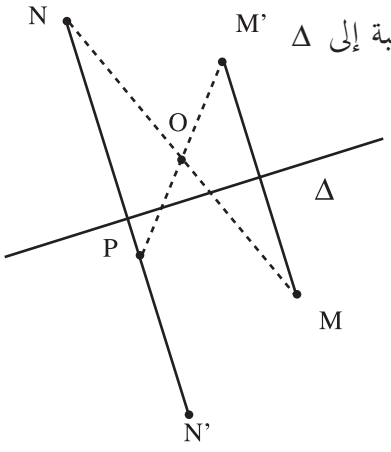
(6)



(7)

(8)

تمرين مرفق بحل 1



لاحظ الشكل المقابل حيث M' و N' مناظرتي النقطتين M و Nبالنسبة إلى Δ

و N و P مناظرتي M و M' بالنسبة إلى O

1) ما هو مناظر المستقيم (MM') بالنسبة إلى O؟

2) بيّن أنّ (MM') موازي لـ (NN')

3) استنتج أنّ النقاط N و N' و P على استقامة واحدة.

الحل

1) بما أنّ N و P مناظرتا M و M' بالنسبة إلى O

فإنّ مناظر المستقيم (MM') هو المستقيم (NP).

2) لدينا M' مناظرة النقطة M بالنسبة إلى Δ إذن (MM') عمودي على Δ

و N' مناظرة النقطة N بالنسبة إلى Δ إذن (NN') عمودي على Δ. بالتالي (MM') موازي لـ (NN')

3) لدينا مناظر المستقيم (MM') بالنسبة إلى O هو المستقيم (NP) إذن (MM') موازي لـ (NP).

المستقيم (MM') يوازي كلّ من المستقيمين (NN') و (NP) إذن (NN') موازي لـ (NP) و بالتالي النقاط N و N' و P على استقامة واحدة.

تمرين مرفق بحل 2

نعتبر OAB مثلثا قائم الزاوية في A و $\mathcal{C}$ الدائرة التي مركزها Oو المارة من A

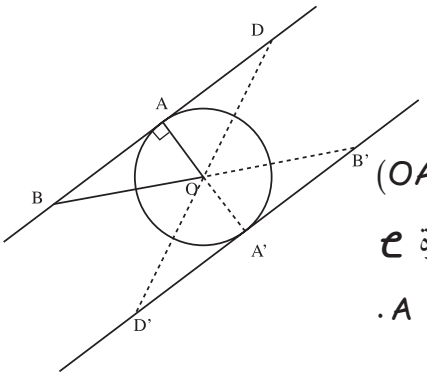
1) بيّن أنّ المستقيم (AB) مماس للدائرة $\mathcal{C}$ في A

2) ابن النقطة D مناظرة B بالنسبة إلى A و النقاط A' و B' و D' مناظرات

A و B و D على التوالي بالنسبة إلى O.

3) بيّن أنّ A' منتصف [B'D']

4) ماهي الوضعية النسبية للمستقيم (A'B') و الدائرة $\mathcal{C}$؟ علّل جوابك.



الحلّ

1) لدينا المثلث OAB قائم الزاوية في A إذن (AB)عمودي على (OA) وبالتالي بعد النقطة O عن المستقيم (AB) هو OA أي شعاع الدائرة $\mathcal{C}$ و النقطة A تنتمي إلى $\mathcal{C}$إذن (AB) هو المماس للدائرة $\mathcal{C}$ في النقطة A.

2) بناء النقاط D و A' و B' و D' (انظر إلى الرسم)

3) لدينا النقطة D مناظرة B بالنسبة إلى A يعني A منتصف القطعة $[BD]$.

بما أنّ A' مناظرة لـ A بالنسبة إلى O و نعلم أنّ التناظر المركزي يحافظ على المنتصف فإنّ A' منتصف $[B'D']$

4) نلاحظ أنّ المستقيم $(A'B')$ مماس للدائرة $\mathcal{C}$ في النقطة A'. لنعلّل ذلك .

لدينا $\widehat{BAO}=90°$ و مناظر ها بالنسبة إلى O هو $\widehat{B'A'O}$ إذن $\widehat{B'A'O}=90°$ إي أنّ $(A'B')$ عمودي على (OA').

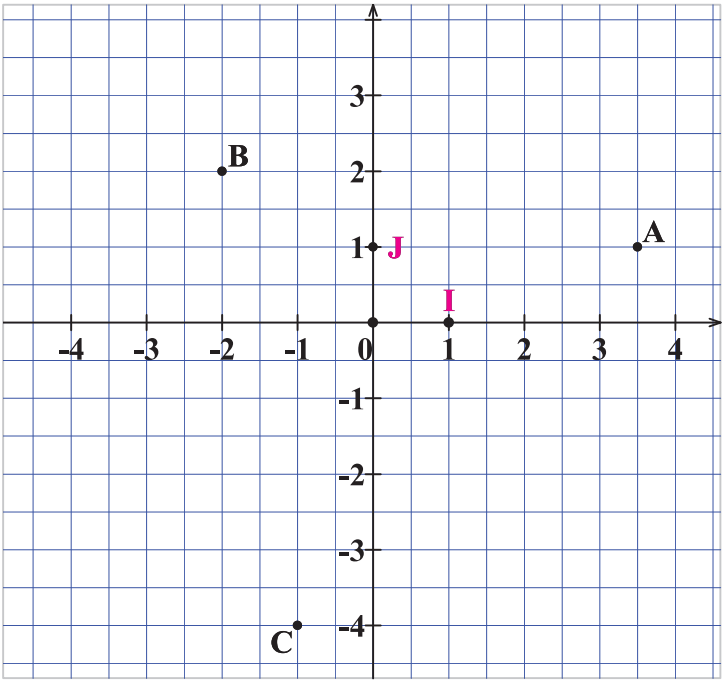
النقطتان A و A' متناظرتان بالنسبة إلى O إذن $OA'=OA$ (OA شعاع الدائرة $\mathcal{C}$) وبالتالي فإنّ A' تنتمي إلى الدائرة $\mathcal{C}$

إذن المستقيم $(A'B')$ مماس للدائرة $\mathcal{C}$ في النقطة A'.

IV التناظر و التعيين:

نشاط

لاحظ الرسم التالي حيث (O, I, J) معين في المستوي و $OI=OJ=1cm$ و $(OI)\perp(OJ)$ لتكن النقاط A و B و C كما يوضّح الشكل المصاحب.



1) حدّد إحداثيات كلّ من النقاط الموجودة في الرسم وفق المعين (O,I,J)

2) أ) حدّد مناظرات النقاط I و B و C بالنسبة إلى (OI)

ب) ماذا تلاحظ بالنسبة إلى فاصلة كلّ نقطة من النقاط I و B و C و فاصلة مناظرتها بالنسبة إلى (OI) و كذلك ترتيبة كلّ نقطة من النقاط المذكورة سابقا و ترتيبة مناظرتها بالنسبة إلى (OI)

ج) عيّن النقطتين $R(3,\frac{1}{2})$ و $S(3,-\frac{1}{2})$. ماذا تلاحظ بالنسبة إلى إحداثيتيهما؟ تحقّق أنّهما متناظرتان بالنسبة إلى (OI)

3)أ) حدّد مناظراتي النقاط J و A بالنسبة إلى (OJ)

ب) ماذا تلاحظ بالنسبة إلى فاصلة كلّ نقطة من النقاط J و A و B و فاصلة مناظرتها بالنسبة إلى (OJ) و كذلك ترتيبة كلّ نقطة من النقاط المذكورة سابقا و ترتيبة مناظرتها بالنسبة إلى (OJ)

ج) عيّن النقطتين $P(-\frac{3}{2},-\frac{1}{2})$ و $Q(\frac{3}{2},-\frac{1}{2})$. ماذا تلاحظ بالنسبة إلى إحداثيتيهما؟تحقّق أنّهما متناظرتان بالنسبة إلى (OJ)

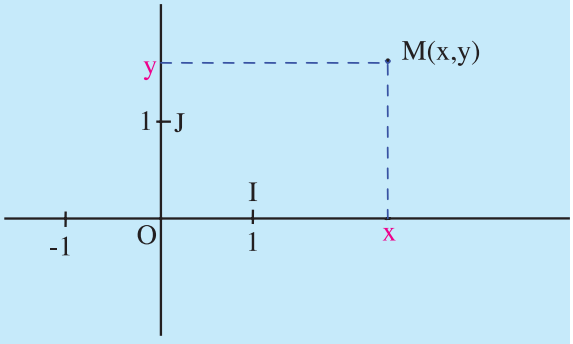
4)أ) حدّد مناظرات النقاط B و A و C بالنسبة إلىO

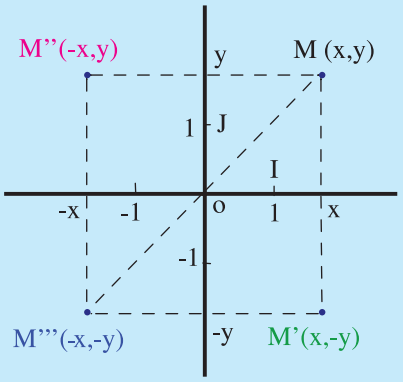
ب) ماذا تلاحظ بالنسبة إلى فاصلة كلّ نقطة من النقاط B و A و C و فاصلة مناظرتها بالنسبة إلى O و كذلك ترتيبة كلّ نقطة من النقاط المذكورة سابقا و ترتيبة مناظرتها بالنسبة إلى O

ج) عيّن النقطتين $G(-2,\frac{5}{2})$ و $H(2,-\frac{5}{2})$.ماذا تلاحظ بالنسبة إلى إحداثيتيهما؟ تحقّق أنّهما متناظرتان بالنسبة إلى O.

كلّ ثلاثي نقط (O, I, J) حيث (OI) عمودي على (OJ) يُسمّى معينا متعامدا في المستوى.

- النقطة O تُسمّى أصل المعين
- المستقيم (OI) يُسمّى محور الفواصل.
- المستقيم (OJ) يُسمّى محور الترتيب.
- المستقيمان (OI) و (OJ) هما محورا الإحداثيات.



●لكلّ زوج من الأعداد الكسريّة (x,y) نسند نقطة وحيدة M من المستوي ونكتب M(x,y) و نقرأ النقطة M ذات إحداثيات (x,y)	
إذا كان (O,I,J) معينا متعامدا في المستوي وإذا كان الزوج الكسري (x,y) إحداثيات النقطة M فإنّ : مناظرتها بالنسبة إلى (OI) هي النقطة M' إحداثياتها (x,-y) مناظرتها بالنسبة إلى(OJ) هي النقطة M'' إحداثياتها (-x, y) – مناظرتها بالنسبة إلى النقطة O هي النقطة M''' إحداثياتها (-x,-y)	

أطبق :

1 ليكن(O, I, J) معينا متعامدا في المستوي حيث OI=OJ

و النقاط A (1,3) و B (-3,2) و C (2,4).

ا) ابحث عن إحداثيات A' و B' و C' مناظرات النقاط A و B و C بالنسبة للمحور (OI)

كل من النقاط

ب) ابحث عن إحداثيات كل A'' و B'' و C'' مناظرات النقاط A' و B' و C' بالنسبة للمحور (OJ)

من النقاط

ج) ابحث عن إحداثيات مناظرات النقاط A و B و C بالنسبة إلى O

د) ماذا تستنتج ؟

2 ليكن (O, I, J) معيّنا متعامدا في المستوي حيث OI=OJ والنقطة $A(\frac{7}{3},-2)$.

ماذا تستنتج بالنسبة إلى النقطتين A و B في كلّ حالة من الحالات التالية:

أ) $B(-\frac{7}{3},-2)$ ، ب) $B(\frac{7}{3},2)$ ، ج) $B(-\frac{7}{3},2)$ ، د) $B(-2,\frac{7}{3})$.

ليكن (O, I, J) معينا متعامدا في المستوي .

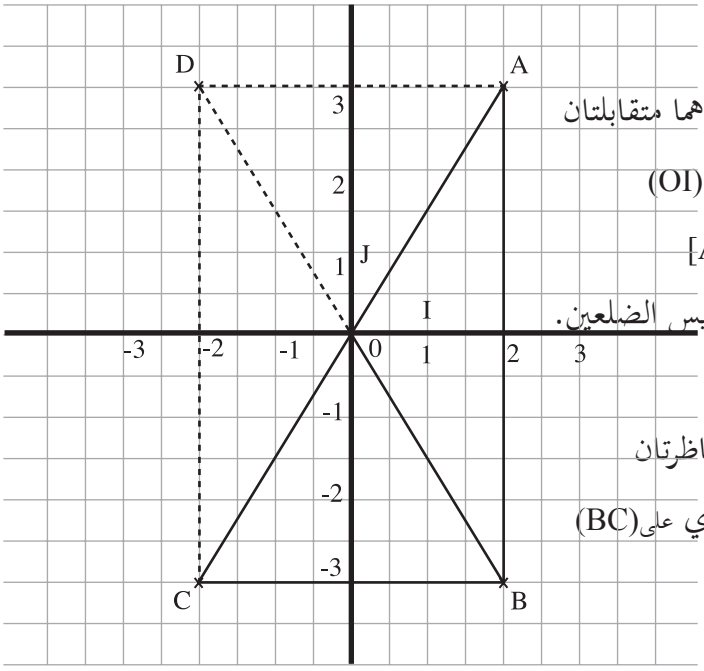
أ) عيّن النقطتين A (2,3) و B (2,-3). بيّن أن المثلث OAB متقايس الضلعين.

ب) نعتبر النقطة C مناظرة النقطة A بالنسبة للنقطة O. حدّد إحداثياتها.

بيّن أنّ المثلث ABC قائم.

ج) حدّد إحداثيات النقطة D بحيث الرباعي ABCD يكون مستطيلا.

الحل



أ) النقطتان A و B لهما نفس الفاصلة و ترتيبتاهما متقابلتان

إذن هما متناظرتان بالنسبة إلى محور الفاصلات (OI)

أي أنّ (OI) هو الموسط العمودي للقطعة [AB]

و بالتالي OA=OB يعني أنّ المثلث OAB متقايس الضلعين.

ب) النقطة C(-2,-3).

نلاحظ أنّ B (2,-3) و C(-2,-3) إذن هما متناظرتان

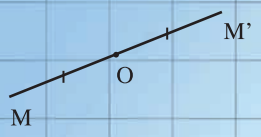
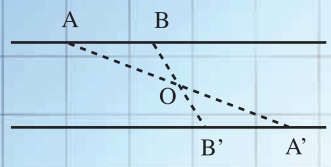
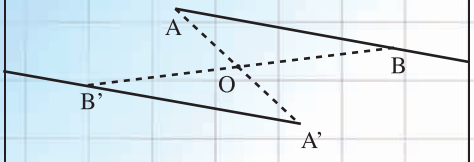
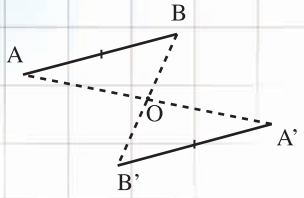
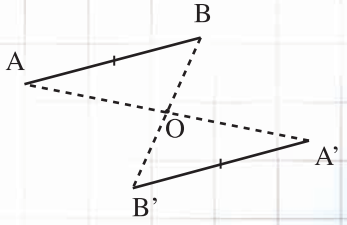
بالنسبة إلى محور الترتيبات و بالتالي (OJ) عمودي على(BC)

وبما أنّ
- (OI) عمودي على (AB)
- و
- (OI) عمودي على(OJ)

لدينا (OJ) موازي لـ (AB) و(OJ) عمودي على(BC) إذن (AB) عمودي على(BC) و بالتالي المثلث ABCقائم في B.

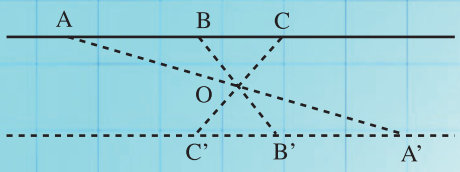
ج) بما أنّ $\widehat{ABC}=90°$ إذا ليكون ABCD مستطيلا يكفي أن يكون متوازي أضلاع.و بما أنّ O منتصف القطر [AC] فإذا النقطة O هي منتصف القطر [BD].إذا النقطة D هي مناظرة النقطة B بالنسبة إلى النقطة O و بالتالي D(-2,3).

أحوصـــل

لتكن O نقطة من المستوي. ▪ M نقطة مختلفة عن O. تكون النقطة M' مناظرة للنقطة M بالنسبة إلى O إذا كانت O منتصف [MM'] ▪ مناظرة النقطة O بالنسبة إلى O هي النقطة O نفسها.	
مناظر مستقيم بتناظر مركزي هو مستقيم موازي له. لتكن O نقطة من المستوي. إذا كان (AB) مستقيم فإنّ مناظر (AB) بالنسبة إلى O هو المستقيم (A'B') حيث A' وB' مناظرتي A وB على التوالي بالنسبة إلى O.	
مناظر نصف مستقيم بتناظر مركزي هو نصف مستقيم لتكن O نقطة من المستوي. إذا كان [AB] نصف مستقيم وA' وB' مناظرتي A وB على التوالي بالنسبة إلى O فإنّ مناظر [AB] بالنسبة إلى O هو نصف المستقيم [A'B']	
مناظرة قطعة مستقيم بتناظر مركزي هي قطعة مستقيم مقايسة لها لتكن O نقطة من المستوي. إذا كانت [AB] قطعة مستقيم وA' وB' مناظرتي A وB على التوالي بالنسبة إلى النقطة O فإن مناظرة [AB] بالنسبة إلى O هي القطعة [A'B'] و لدينا A'B'= AB	
التناظر المركزي يحافظ على البعد. إذا كانت نقطتان A' وB' مناظرتين على التوالي للنقطتين A وB بالنسبة إلى نقطة O من المستوي فإنّ A'B'= AB	

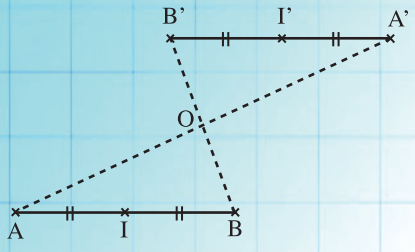
التناظر المركزي يحافظ على الإستقامة.

مناظرات ثلاث نقاط على استقامة واحدة بالنسبة إلى نقطة O هي ثلاث نقاط على استقامة واحدة.



التناظر المركزي يحافظ على المنتصف

مناظر منتصف قطعة مستقيم بالنسبة إلى النقطة O هو منتصف مناظر تلك القطعة



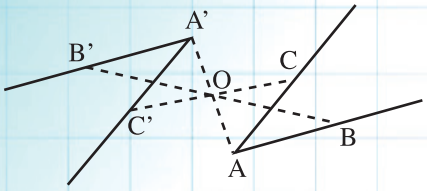
مناظرة زاوية بالنسبة إلى نقطة من المستوي هي زاوية مقايسة لها.

التناظر المركزي يحافظ على أقيسة الزوايا.

لتكن O نقطة من المستوي .

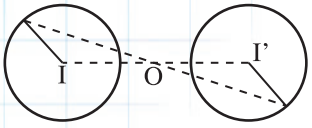
A وB وC ثلاث نقاط مختلفة و'A و'B و'C

مناظراتها على التوالي بالنسبة إلى نقطة O. فإنّ مناظرة الزاوية $\widehat{BAC}$ هي الزاوية $\widehat{B'A'C'}$ و $\widehat{BAC} = \widehat{B'A'C'}$.



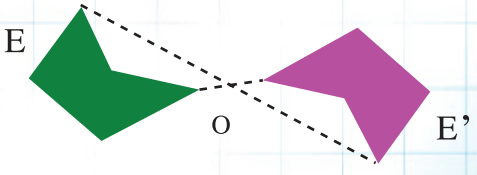
مناظرة دائرة بالنسبة إلى نقطة من المستوي هي دائرة مقايسة لها.

مناظرة دائرة C مركزها I بالنسبة إلى نقطة O هي دائرة C' مركزها I' مناظرة النقطة I ولها نفس الشعاع.

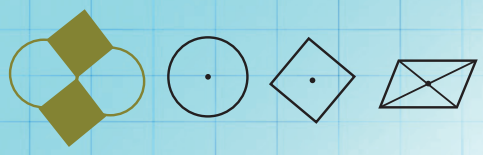


التناظر المركزي يحافظ على المساحات

شكلان هندسيان (E) و (E') متناظران بالنسبة إلى نقطة O هما متقايسان ولهما نفس المساحة. التناظر المركزي يحافظ على المساحات



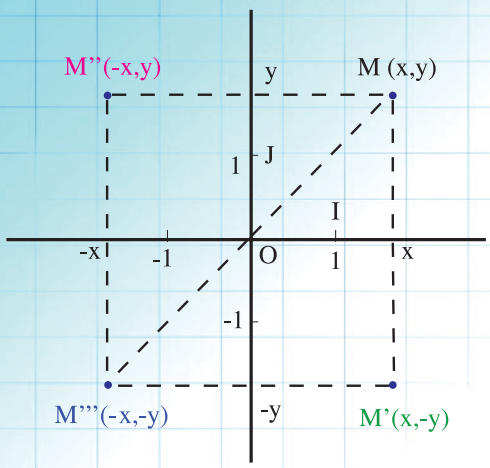
نقطة O هي مركز تناظر شكل F من المستوي يعني أنّ مناظر F هو الشكل F نفسه بالنسبة إلى O.



إذا كان (O,I,J) معينا في المستوي حيث (OI) و (OJ) متعامدان

وإذا كان الزوج الكسري (x,y) إحداثيات النقطة M فإنّ :

- مناظرتها بالنسبة إلى (OI) هي النقطة M' إحداثياتها (x,-y)
- مناظرتها بالنسبة إلى(OJ) هي النقطة M'' إحداثياتها (-x, y)
- مناظرتها بالنسبة إلى النقطة O أصل المعيّن هي النقطة M''' إحداثياتها (-x,-y)



تمـــارين

1 أ) أرسم قطعة مستقيم [AB] حيث AB=8cm

ب) ابن النقاط I وJ وK منتصفات قطع المستقيمات $[AB]$ و$[AI]$ و $[IB]$على التوالي

ج) أنقل الجمل التالية على كراسك ثمّ أتمم الفراغات بما يناسب.

النقطة ..... مناظرة النقطة ..... بالنسبة إلى I

النقطتان J وK متناظرتان بالنسبة إلى .....

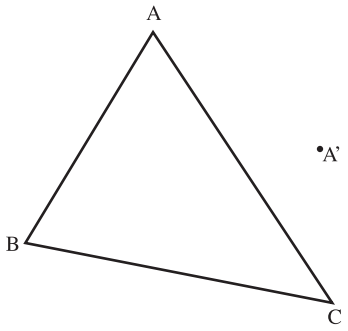
النقطة B مناظرة النقطة I بالنسبة إلى .....

النقطتان .... و..... متناظرتان بالنسبة إلى J

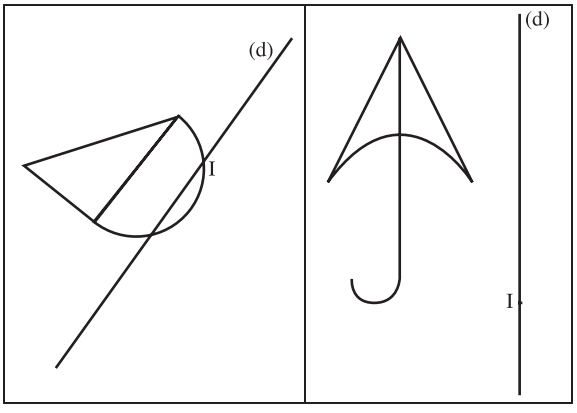
2 أ) انقل الشكل التالي على كراسك حيث ABC مثلث و'A

نقطة من المستوي ثمّ ابن النقطة O منتصف ['AA]

ب) أكمل بناء مناظر المثلث ABC بالنسبة إلى O.

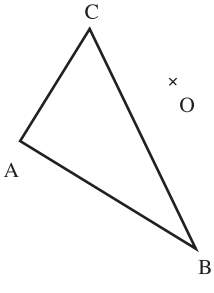


3 انقل كل شكل من الشكلين التاليين على كراسك ثمّ ارسم مناظره بالنسبة إلى النقطة I ثم بالنسبة إلى المستقيم (d).



4 يمثل الشكل التالي مثلثا ABC قائم الزاوية في A حيث BC = 4cm و $\widehat{BCA} = 60°$ وO نقطة من المستوي.

1) أرسم الشكل على كراسك ثمّ ابن النقاط 'A و'B و'C مناظرات A وB وC على التوالي بالنسبة إلى O



2) ما هو قيس كلّ من الزاويا $\widehat{B'A'C'}$ و $\widehat{B'C'A'}$ و $\widehat{A'B'C'}$ ؟ علّل جوابك.

3) ما هو البعد $B'C'$ ؟ علّل جوابك.

5 1) أرسم مثلثا ABC حيث BC=6cm وAB=3cm و $\widehat{CBA} = 80°$ ثمّ عيّن النقطة I منتصف $[AC]$.

2) ابن النقطة B' مناظرة النقطة B بالنسبة إلى I.

3) ما هي طبيعة الرباعي BAB'C ؟ علّل جوابك.

4) أحسب قيس الزاوية $\widehat{CB'A}$ ومحيط الرباعي BAB'C .

6 أ) ارسم مربعا EFGH حيث EF=3 cm

ب) عيّن النقطة O من نصف المستقيم $[EF)$ حيث EO=5 cm

ج) ابن النقاط E' وF' وG' وH' مناظرات E وF وG وH على التوالي بالنسبة إلى O

د) بيّن أنّ الرباعي E'F'G'H' مربّع. ما هو محيطه ؟

7 أ) أرسم قطعة مستقيم [AB] وابن المستقيم Δ الموسّط العمودي لـ [AB]

ب) عيّن نقطة K من Δ لا تنتمي لـ [AB]

ج) ابن النّقطتين K' وB' مناظرتي K وB على التّوالي بالنّسبة إلى A

د) استنتج أنّ المثلث AK'B' متقايس الضّلعين

8 أ) أرسم مثلثا ABC ثمّ ابن النّقطتين B' وC' مناظرتي B وC بالنّسبة إلى A

ب) ابن النقطة C'' مناظرة النّقطة C' بالنّسبة إلى (AB)

ج) بين أنّ BC= B'C''.

9 أ) ابن مثلثا ABC حيث $AB = 4.5cm$ و $AC = 8cm$ و $BC = 7cm$

ب) ابن النقطة O حيث تكون B مناظرة لـ C بالنسبة إلى O

ج) ابن النقطة M مناظرة A بالنسبة إلى O

د) ابن المثلث RBC مناظر المثلث ABC بالنسبة إلى المستقيم (BC). ما هو محيطه ؟

هـ) بيّن دون حساب أنّ المثلثين MCB وBRC لهما نفس المحيط ونفس المساحة.

10 أ) أرسم معيّنا متعامدا (O, I, J)

ب) لتكن النقط A(3,-2) وB(0,-4) وC(-3,-2) وD(3,2) وE(0,4) وF(5,0) وG(-5,0).

اذكر من بين هذه النقاط :

— كلّ نقطتين متناظرتين بالنسبة إلى (OI)

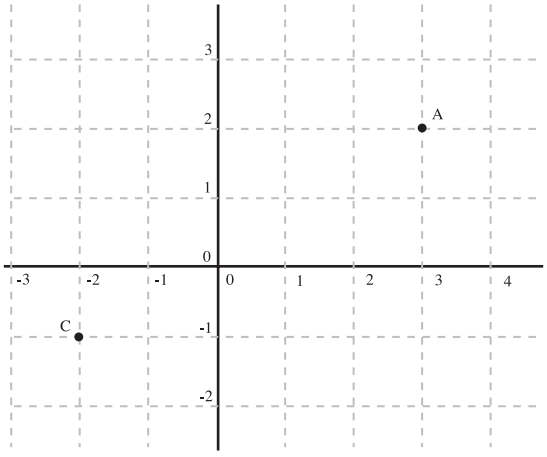
— كلّ نقطتين متناظرتين بالنسبة إلى (OJ)

— كلّ نقطتين متناظرتين بالنسبة إلى O

11 أ) أنقل على ورقة مليمتريّة المعيّن (O,I,J) والنقطتين A وC

ب) حدّد إحداثيات كلّ من A وC

ج) أرسم المربّع ABCD وحدّد إحداثيات النقطتين B وD.

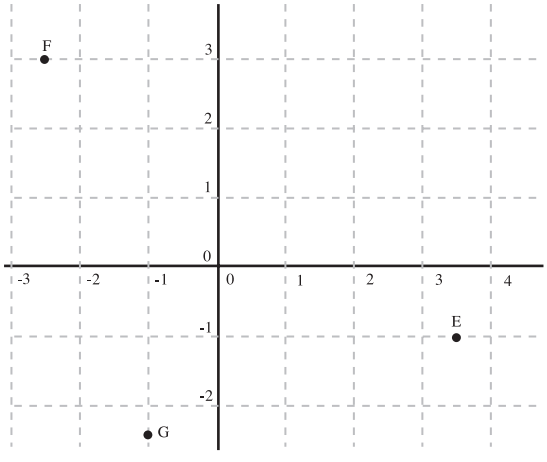


12 أ) تأمّل الرسم المقابل حيث (O, I, J) معيّنا

ب) ما هي إحداثيات النقاط E وF وG

ج) حدّد إحداثيات مناظرات النقاط E وF وG بالنسبة إلى (OI) ثمّ بالنسبة إلى (OJ) ثمّ بالنسبة إلى O.

د) أنقل الرسم على كراسك وقم بتعيين تلك النقاط.

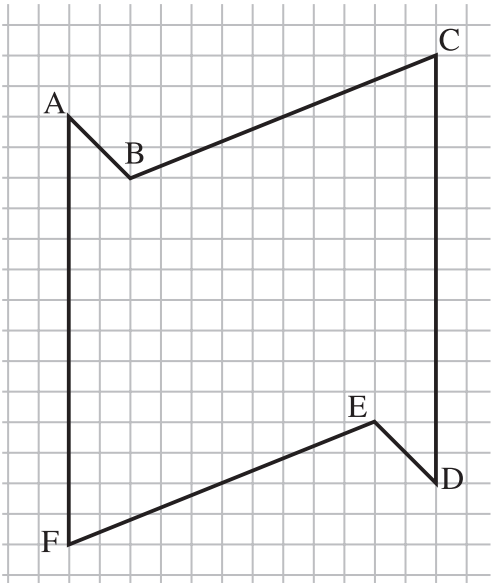


13 أ) أرسم دائرة $\mathcal{C}$ مركزها I و M نقطة منها.

ب) ابن الدائرة $\mathcal{C}'$ مناظرة $\mathcal{C}$ بالنسبة إلى النقطة M. ليكن I' مركزها.

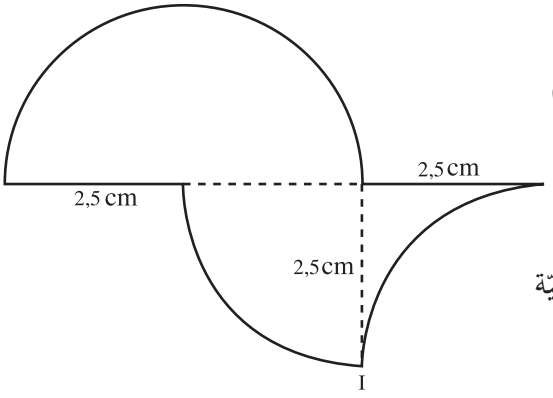
ج) أرسم الدائرة Γ التي قطرها $[II']$. هل أنّ الشكل المتحصّل عليه له مركز تناظر؟ له محور تناظر؟

14 تأمّل الشكل المقابل وحدّد مركز تناظر له.



15 أ) أنقل الشكل المقابل على كراسك ثمّ أرسم مناظره بالنسبة إلى I

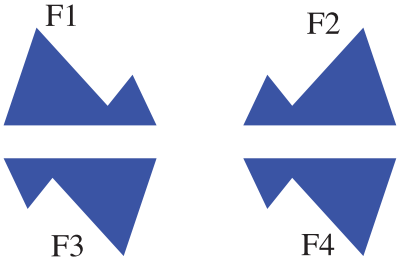
ب) أحسب بـ cm^2 المساحة الجملية للشكل النهائي (بقيمة تقريبيّة لجزء من المائة)



16 هل يوجد تناظر محوري أو مركزي يسمح بتحويل :

الشكل F_1 إلى الشكل F_2 ؟ الشكل F_1 إلى F_3 ؟

الشكل F_1 إلى F_4 ؟ الشكل F_2 إلى F_4 ؟



1) أرسم مستقيمين متوازيين Δ و Δ'

17 2) أ) عيّن نقطة A من Δ ونقطة B من Δ' ثمّ ابن النقطة I منتصف القطعة [AB]

ب) بيّن أنّ Δ مناظر Δ' بالنسبة إلى I

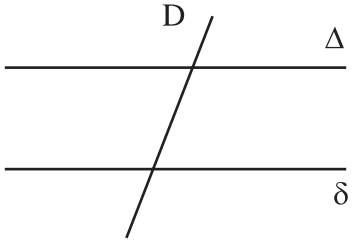
3) أ) عيّن نقطة C من Δ مخالفة لـ A ونقطة D من Δ' مخالفة لـ B و J منتصف القطعة [CD]

ب) بيّن أنّ Δ مناظر Δ' بالنسبة إلى J.

4) كم من تناظر مركزي يمكّن من تحويل المستقيم Δ إلى Δ'؟

18 تأمّل الشكل المقابل حيث المستقيمان Δ و δ متوازيان

ثمّ حدد مركز تناظره معللا جوابك.



19 أ) ارسم دائرة C مركزها O وشعاعها 3cm و [AB] قطرا لها ثمّ عيّن نقطة I من C.

ب) ابن النقطتين A' و B' مناظرتي النقطتان A و B على التوالي بالنسبة إلى I

ج) ابن الدائرة C' المحيطة بالمثلث A'B'I. ليكن O' مركزها.

د) بيّن أنّ مناظرة C بالنسبة إلى I هي C'.

هـ) بيّن أنّ النقطة O' هي منتصف [A'B'].

أ) ارسم متوازي الأضلاع ABCD مركزه O ومستقيما Δ يمرّ من O. Δ يقطع على التوالي المستقيمات (AB) و (BC) و (CD) و (DA) في النقاط M و N و P و Q.

ب) ما هما منتصفي القطعتين [MP] و [NQ] ؟ علّل جوابك.

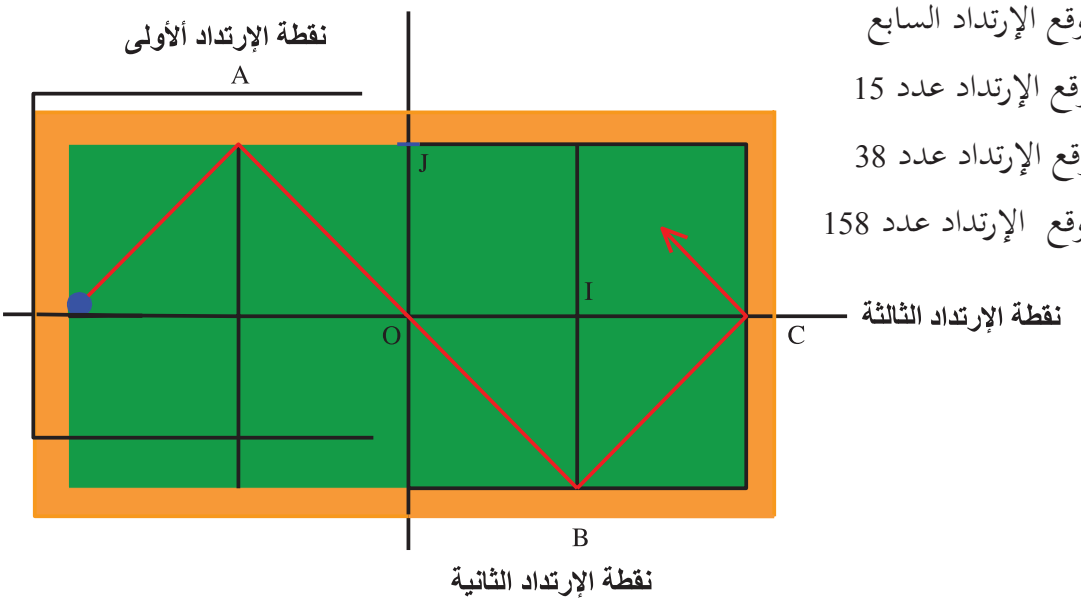
20 يمثّل الشكل التالي طاولة بيار و الخطّ الأحمر مسار الكرة والنقاط A و B و C هي مواقع ارتدادها

أ) حدّد أحداثياتها.

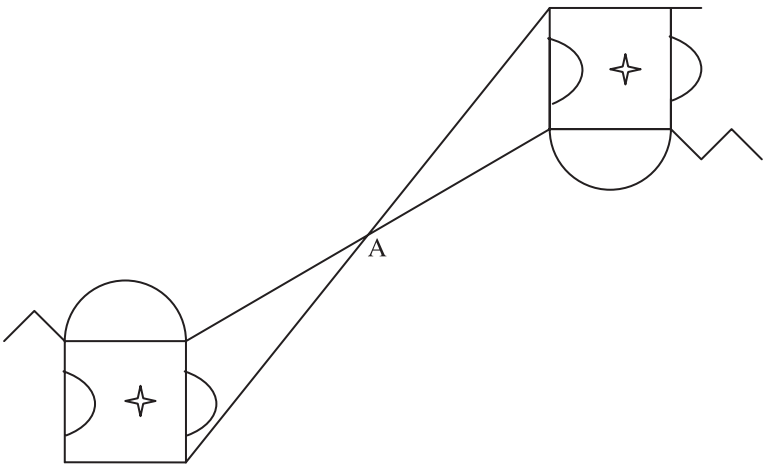
ب) أنقل المعيّن (O,I,J) والنقاط A و B و C على كراسك.

ج) لنفترض أنّ الكرة لا تتوقّف عن الإرتداد. ما هي إحداثيات النقاط التالية :

- D موقع الإرتداد السابع
- E موقع الإرتداد عدد 15
- F موقع الإرتداد عدد 38
- G موقع الإرتداد عدد 158

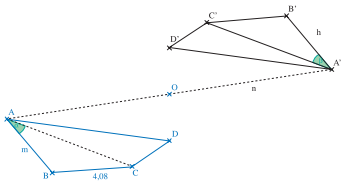


21 ابحث عن الأخطاء الأربعة في الشكل التالي علما وأنّ النقطة A مركز تناظره.



أوظّف تقنيات المعلومات والإتّصال :

أنشطة حول التناظر المركزي بواسطة البرمجيّة geoGebra التي يمكن تحميلها من الموقع http://www.geogebra.atعبر الأنترنات



1. ارسم الرّباعي ABCD
2. عيّن نقطة من المستوي وسمّيها O
3. أنشأ مناظرات النقاط A وB و C وD بالنسبة إلى O وسمّيهم على التوالي A’ وB’ وC’ وD’
4. أنشأ الرباعي A’B’C’D’

قم بتحريك النقطة A بواسطة الفأرة. ماذا تلاحظ بالنسبة إلى النقطة O ؟

أظهر طول القطعة $[AA']$ على الشاشة و قم بتحريك النقطة A. ماذا تلاحظ ؟

ماذا تمثّل النقطة O بالنسبة إلى $[AA']$؟

أكمل : إذا كانت النقطة A’ مناظرة النقطة A بالنسبة إلى O يعني .....

أظهر طول القطعة $[AB]$ على الشاشة وقم بتحريك النقطتين A وB. ماذا تلاحظ بالنسبة إلى $[A'B']$؟

أظهر على الشاشة قيس الزاويتين $\widehat{ABC}$ و $\widehat{A'B'C'}$ وقم بتحريك النقاط A وB وC. ماذا تلاحظ ؟

أكمل : التناظر المركزي يحافظ على .....

أرسم المستقيم (AB). أرسم المستقيم المار من A’ و الموازي لـ (AB). ماذا تلاحظ ؟

أكمل : مناظر مستقيم بتناظر مركزي هو .....

5. عيّن النقطة O خارج الرباعي ABCD. هل توجد نقاط من المستوي مناظرة لنفسها بالنسبة إلى O ؟
6. عيّن النقطة O داخل الرباعي ABCD. هل توجد نقاط من المستوي مناظرة لنفسها بالنسبة إلى O ؟

الزوايا الحاصلة عن تقاطع مستقيمين متوازيين مع مستقيم

I

زاويتان متبادلتان داخليا- زاويتان متماثلتان- زاويتان داخليتان من نفس الجهة.

II

خاصيات زاويتان متبادلتان داخليا والزوايا المتماثلة و الزوايا الداخليّة من نفس الجهة

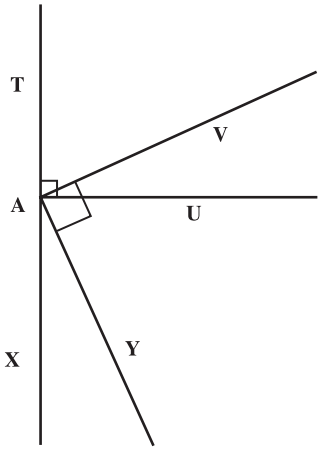
الزوايا الحاصلة
عن تقاطع مستقيمين متوازيين مع مستقيم

أستخضـــر :

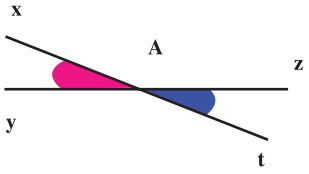
1 لاحظ الشكل المقابل حيث $\widehat{xAu} = \widehat{yAv} = 90°$

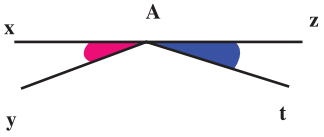
أ) أذكر زاويتين متكاملتين.

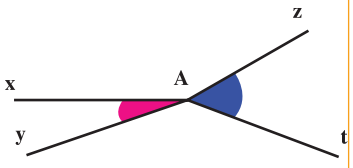
ب) أذكر زاويتين متتامّتين.



2 في أيّ شكل من الأشكال التالية الزاويتان $\widehat{xAy}$ و $\widehat{zAt}$ متقابلتان بالرأس ؟

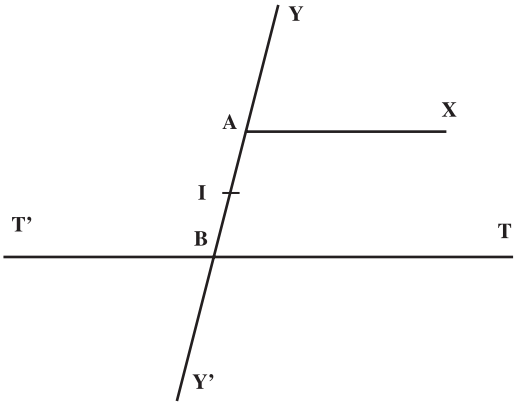






3 لاحظ الشكل المقابل حيث I منتصف [AB] و (Ax)//(tt') .

ثمّ أجب بـ صحيح أو خطأ أمام كلّ مقترح.

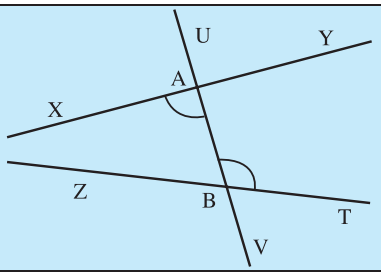
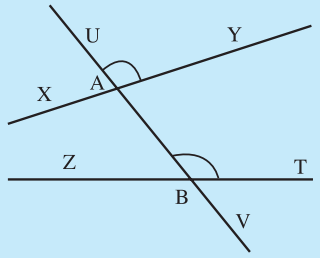
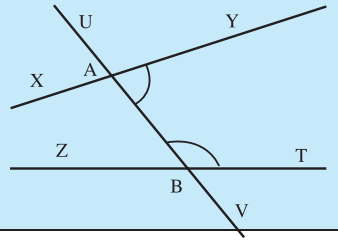


- مناظرة الزاوية $\widehat{xAy}$ بالنسبة إلى I هي $\widehat{tBy'}$
- مناظرة الزاوية $\widehat{xAy}$ بالنسبة إلى I هي $\widehat{t'By'}$
- مناظرة الزاوية $\widehat{xAy}$ بالنسبة إلى I هي $\widehat{t'By}$
- $\widehat{y'Bt'} = \widehat{xAy}$

أستكشـــف وأطبق :

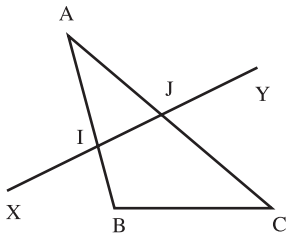
I زاويتان متبادلتان داخليا- زاويتان متماثلتان- زاويتان داخليتان من نفس الجهة.

في كلّ حالة من الحالات الثلاث التالية (xy) و (zt) مستقيمان و (uv) مستقيم قاطع لهما على التوالي في النقطتين A و B.

الزاويتان $\widehat{xAv}$ و $\widehat{uBt}$ هما زاويتان متبادلتان داخليا.	
الزاويتان $\widehat{uAy}$ و $\widehat{uBt}$ هما زاويتان متماثلتان.	
الزاويتان $\widehat{yAv}$ و $\widehat{uBt}$ هما زاويتان داخليتان من نفس الجهة.	

أطبق:

لاحظ الشكل المقابل حيث ABC مثلث و (xy) مستقيم يقطع [AB] و [AC] على التوالي في النقطتين I و J.



أ) أذكر زاويتين متبادلتين داخليا بالنسبة إلى المستقيم (xy)

ب) أذكر زاويتين متماثلتين بالنسبة إلى المستقيم (AC)

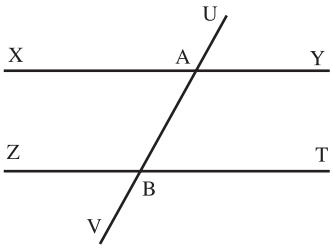
ج) أذكر زاويتين داخليتين من نفس الجهة بالنسبة إلى المستقيم (BC)

الزوايا المتبادلة داخليّا- مجموع أقيسة زوايا مثلّث

نشاط 1 1) أنقل الرسم المقابل على كراسك حيث (xy)و (zt) مستقيمان متوازيان و (uv) مستقيم قاطع لهما على التوالي في النقطتين A و B.

2) عيّن النقطة I منتصف [AB].

3) لتكن C نقطة من [Ax) والنقطة D مناظرتها بالنسبة إلى I .



أ) أذكر زاويتين متبادلتين داخليا.

ب) ما هي مناظرة الزاوية $\widehat{xAB}$ بالنسبة إلى I ؟

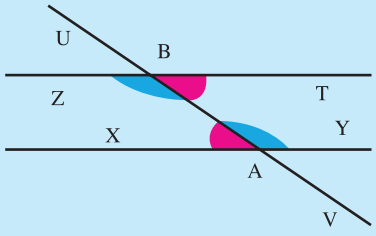
ج) استنتج أنّ $\widehat{xAB} = \widehat{ABt}$.

د) بيّن أنّ $\widehat{zBA} = \widehat{yAB}$.

إذا قطع مستقيم مستقيمين متوازيين فإنّ كلّ زاويتين متبادلتين داخليا متقايستان.

الزاويتان $\widehat{xAu}$ و $\widehat{tBv}$ متبادلتان داخليا ولدينا $\widehat{xAu} = \widehat{tBv}$

الزاويتان $\widehat{yAu}$ و $\widehat{zBv}$ متبادلتان داخليا ولدينا $\widehat{yAu} = \widehat{zBv}$



نشاط 2 أ) أرسم مثلثا ABC.

ب) ابن المستقيم (xy) المار من A و الموازي لـ (BC).

ج) أذكر زاويتين متبادلتين داخليا إحداهما $\widehat{ABC}$ ؟

د) أذكر زاويتين متبادلتين داخليا إحداهما $\widehat{ACB}$ ؟

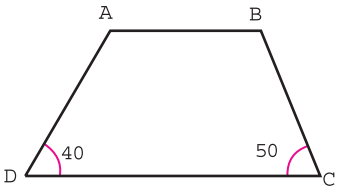
هـ) أنقل على كراسك ثمّ أكمل مايلي:

$\widehat{ABC} + \widehat{BAC} + \widehat{ACB} = \ldots + \widehat{BAC} + \ldots = \ldots$

مجموع أقيسة زوايا مثلث تساوي $180°$

اطبّق :

1 أ) ABCD شبه منحرف.أحسب الزاويتين $\hat{A}$ و $\hat{B}$.

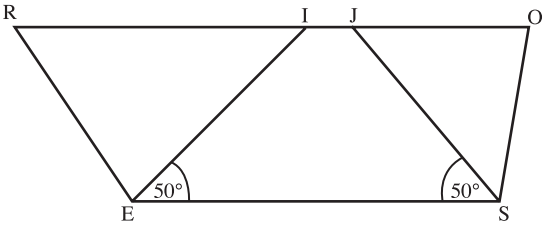


ب) لاحظ الشكل المقابل.

حيث الرّباعي ROSE شبه منحرف

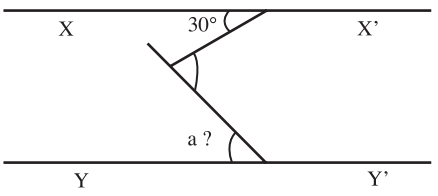
و المستقيمان (JS) و (RE) متوازيان.

أحسب أقيسة زوايا المثلّث IRE .



2 تأمّل الشّكل المقابل حيث $(xy)\parallel(x'y')$

ثمّ أحسب a.



3 نعتبر المثلّث COQ حيث $\hat{O}=2\times\hat{C}$ و $\hat{Q}=3\times\hat{C}$

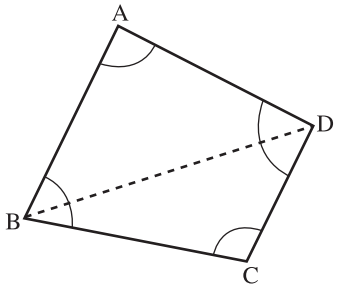
أ) أكتب بدلالة $\hat{C}$ مجموع أقيسة زوايا هذا المثلث.

ب) أحسب $\hat{C}$ و $\hat{O}$ و $\hat{Q}$.

ج) أرسم هذا المثلّث علما و أنّ $CO=5cm$.

4 في الشكل المقابل ABCD رباعي محدّب .

أنقل على كراسك ما يلي ثمّ أكمل بما يناسب.



$\widehat{ADC}=\widehat{ADB}+\ldots$

$\widehat{CBA}=\ldots+\widehat{DBA}$

$\widehat{BAD}+\widehat{ADC}+\widehat{DCB}+\widehat{CBA}=\widehat{BAD}+\widehat{ADB}+\ldots+\widehat{DCB}+\ldots+\widehat{DBA}$

$=\widehat{BAD}+\widehat{ADB}+\widehat{DBA}+\ldots+\widehat{DCB}+\ldots$

$=\ldots+\ldots$

$=360°$

مجموع أقيسة رباعي محدّب يساوي 360°

II خاصيات زاويتان متبادلتان داخليا والزوايا المتماثلة و الزوايا الداخليّة من نفس الجهة

نشاط 1

أ) أرسم زاوية $\widehat{xAy}$ قيسها $40°$ و عيّن نقطة C **من** $[Ax)$

ب) أرسم نصف المستقيم $[Cz)$ بحيث $\widehat{ACz} = \widehat{xAy}$ و $[Cz)$ و $[Ay)$ ليسا من نفس الجهة بالنسبة إلى (Ax).

ج) تحقق أنّ (Ay) و (Cx) متوازيان.

2) أعد نفس مراحل السؤال **1)** باعتبار $\widehat{xAy} = 70°$. ماذا تلاحظ ؟

ليكن D و D' مستقيمين و Δ قاطعا لهما

إذا تقايست زاويتان متبادلتان داخليّا فإنّ D و D' متوازيان.

اطبّق:

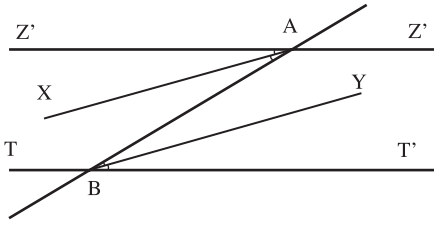
1 أ) أرسم مثلّثا ABC حيث $BC = 5cm$ و $\widehat{ABC} = 70°$ و $\widehat{ACB} = 50°$

ب) أرسم خارج ABC المثلّث ACD حيث $\widehat{ACD} = 60°$ و $\widehat{CAD} = 50°$

ج) بيّن أنّ المستقيمين (AD) و (BC) متوازيان وأنّ أيضا (AB) و (CD) متوازيان.

2 لاحظ الشكل المقابل حيث (zz') و (tt') متوازيان.

بيّن أنّ (Ax) و (By) متوازيان.



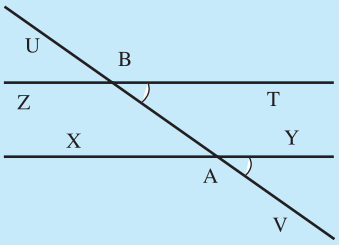
نشاط 2 أ) أرسم مستقيمين (xy) و (zt) متوازيين و مستقيم (uv) قاطعا لهما على التّوالي في النقطتين A و B.

ب) حدّد زاويتين متماثلتين ثمّ بيّن أنّهما متقايستان.

ج) حدّد زاويتين داخليتين من نفس الجهة ثمّ بيّن أنّهما متكاملتان.

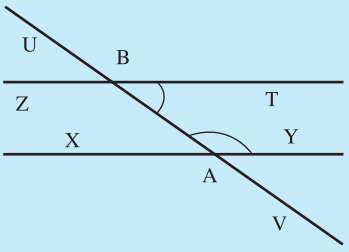
إذا قطع مستقيم مستقيمين متوازيين فإنّ كلّ زاويتين متماثلتين متقايستان.

(xy) و (zt) مستقيمان متوازيان والمستقيم (uv) قاطع لهما على التوالي في النقطتين A و B إذن الزاويتان $\widehat{vAy}$ و $\widehat{tBA}$ متماثلتان ولدينا $\widehat{vAy} = \widehat{tBA}$

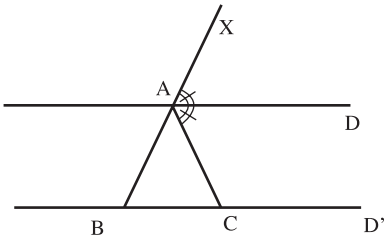


إذا قطع مستقيم مستقيمين متوازيين فإنّ كلّ زاويتين داخليتين من نفس الجهة متكاملتان.

(xy) و (zt) مستقيمان متوازيان والمستقيم (uv) قاطع لهما على التوالي في النقطتين A و B إذن الزاويتان $\widehat{uAy}$ و $\widehat{tBA}$ داخليتان من نفس الجهة ولدينا $\widehat{uAy} + \widehat{tBA} = 180°$



أطبّق:



1 تأمّل الشكل المقابل حيث المستقيمان D و D' متوازيان.

بيّن أنّ المثلث ABC متقايس الضلعين.

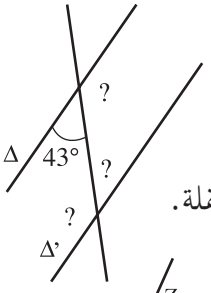
2 أ) ابن شبه منحرف EFGH قاعدتاه [EH] و [FG] بحيث $\widehat{EHG} = 150°$ و $\widehat{EFG} = 30°$

ب) أحسب $\widehat{FEH}$ و $\widehat{FGH}$.

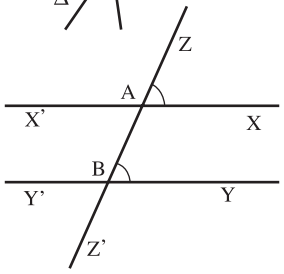
ج) ما هي طبيعة شبه المنحرف EFGH؟

3 تأمّل الشكل التّالي حيث Δ و Δ' مستقيمان متوازيان

ثمّ حدّد أقيسة الزوايا التي بها نقاط استفهام دون استعمال المنقلة.



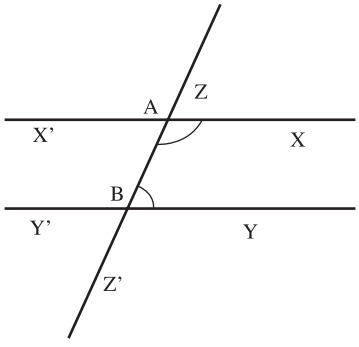
نشاط 3 في الشكل المقابل لدينا (xx') و (yy') مستقيمان و (zz') قاطعا لهما حيث $\widehat{zAx} = \widehat{zBy}$.



1) بيّن أنّ $\widehat{zBy} = \widehat{x'Az'}$.

2) استنتج أنّ المستقيمين (xx') و (yy') متوازيان.

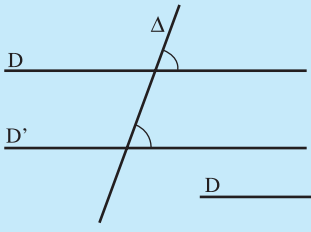
نشاط 4 في الشكل المقابل لدينا (xx') و (yy') مستقيمان و (zz') قاطعا لهما حيث $\widehat{xAz'} + \widehat{zBy} = 180°$.



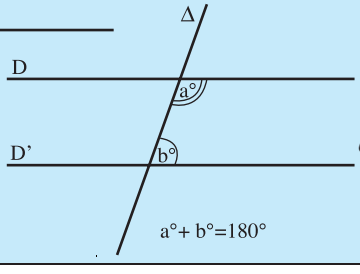
بيّن أنّ المستقيمين (xx') و (yy') متوازيان.

ليكن D و D' مستقيمين و Δ قاطعا لهما

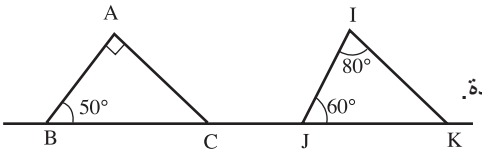
- إذا تقايست زاويتان متماثلتان بالنسبة إلى Δ فإنّ D و D' متوازيان



- إذا كانت زاويتان داخليتان من نفس الجهة بالنسبة إلى Δ متكاملتان فإنّ D و D' متوازيان



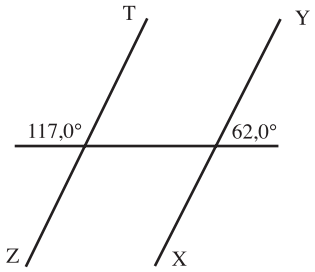
اطبّق:



1 تأمّل الشّكل المقابل حيث B وC وJ و K على استقامة واحدة.

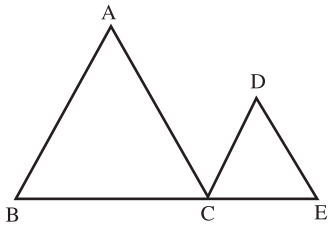
بيّن أنّ المستقيمين (AC) و (IK) متوازيان.

2 لاحظ الشكل المقابل.



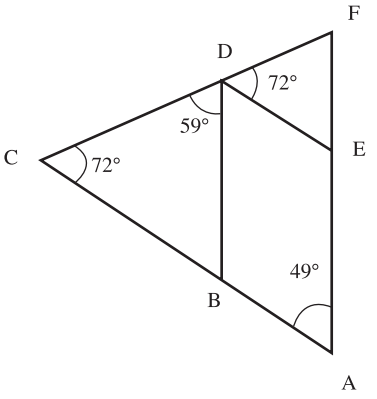
ما هي الوضعية النسبية للمستقيمين (xy) و (zt) ؟

3 تأمّل الشّكل المقابل حيث ABC و CDE مثلثان متقايسا الأضلاع و E و C و B على استقامة واحدة.



ما هي الوضعية النسبية لكلّ من المستقيمين (AB) و (CD) والمستقيمين (AC) و (DE) ؟

4 تأمّل الشّكل المقابل حيث C و D و F على استقامة واحدة وكذلك A و E و F على استقامة واحدة

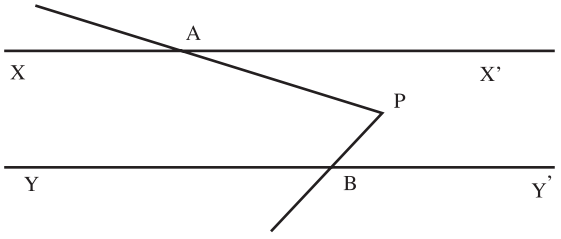


ما هي الوضعية النسبية للمستقيمين (AC) و (ED) ؟

كذلك بالنسبة إلى المستقيمين (AF) و (BD) .

تمرين مرفق بحل عدد 1 :

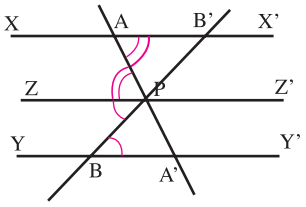
لاحظ الشّكل المقابل حيث (xx') و (yy') متوازيان و P نقطة من المستوي.



1) في حالة P تنتمي إلى الشريط المحدود بالمستقيمين (xx') و (yy')

بيّن أنّ $\widehat{x'AP} + \widehat{y'BP} = \widehat{APB}$.

2) هل تتحصّل على نفس النتيجة عندما تكون النقطة P خارج نفس الشريط ؟



الحل :

الطريقة الأولى:

1) ليكن (zz') المستقيم المار من P

و الموازي لـ (xx')

لدينا المستقيمان (xx') و (zz') متوازيان و (AP) قاطع لهما

إذن الزاويتان $\widehat{x'AP}$ و $\widehat{zPA}$ متبادلتان داخليا وبالتالي

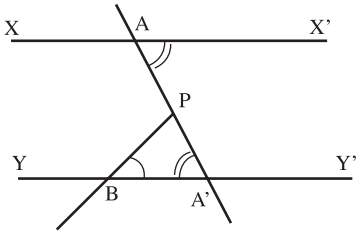
$\widehat{x'AP} = \widehat{zPA}$ **(1)**

كذلك لدينا المستقيمان (yy') و (zz') متوازيان و (BP) قاطع لهما

إذن الزاويتان $\widehat{y'BP}$ و $\widehat{zPB}$ متبادلتان داخليا وبالتالي $\widehat{y'BP} = \widehat{zPB}$ **(2)**

الزاويتان $\widehat{zPA}$ و $\widehat{zPB}$ متجاورتان إذن $\widehat{zPA} + \widehat{zPB} = \widehat{APB}$

ومن **(1)** و **(2)** نستنتج أنّ $\widehat{APB} = \widehat{x'AP} + \widehat{y'BP}$.



الطريقة الثانية :

لنا $\widehat{PA'B}$ و $\widehat{x'AP}$ زاويتان متبادلتان داخليّا إذا $\widehat{x'AP} = \widehat{PA'B}$

إذا $\widehat{x'AP}+\widehat{y'BP}=\widehat{PA'B}+\widehat{y'BP}$

مجموع زوايا مثلث تساوي $180°$ $=180°-\widehat{BPA'}$

$=\widehat{APB}$

2) أدرس الوضعية عندما تكون P خارجة عن الشريط المحدود بالمستقيمين (xx') و (yy')

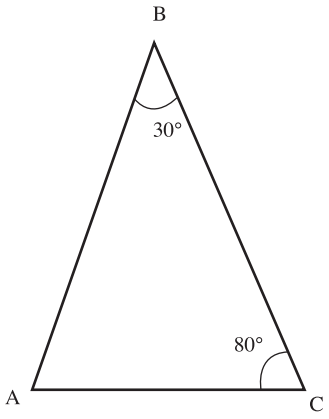
تمرين مرفق بحل عدد 2 :

أرسم مثلثا ABC حيث $AB = 5cm$ ، $\hat{B} = 30°$ ، $\hat{C} = 80°$

1) قم برسم تقريبي وضع عليه المعطيات السابقة.

2) هل يمكنك رسم الضلع [AB] و الزاويتين $\hat{B}$ و $\hat{C}$ مباشرة ؟

3) اقترح طريقة لبناء هذا المثلث.



الحل :

1) الرسم التقريبي

2) لا يمكن بناء هذا المثلث مباشرة وفق المعطيات المقدّمة

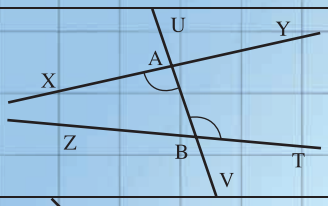
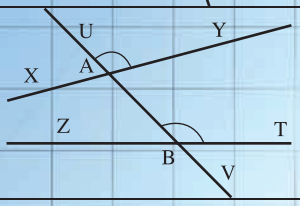
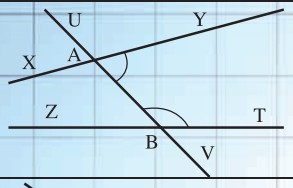
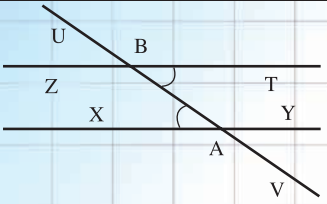
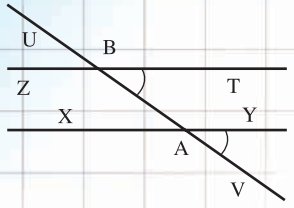
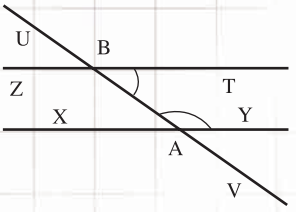
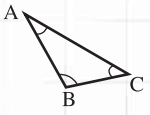
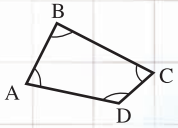
لأنّه يمكن رسم قطعة المستقيم [AB] و الزاوية $\hat{B}$

لكن ليس لدينا البعد BC حتى يمكن رسم الزاوية $\hat{C}$

3) نعلم أنّ مجموع أقيسة زوايا مثلث تساوي $180°$ ومنه نستنتج أنّ $\hat{A} = 70°$

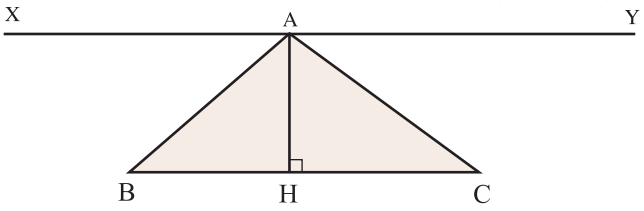
أذن لدينا $AB = 5cm$ و $\hat{A} = 70°$ و $\hat{B} = 30°$ وفي هذه الحالة يمكن رسم المثلث ABC

أحوصـل

الزاويتان $\widehat{xAv}$ و $\widehat{uBt}$ هما زاويتان متبادلتان داخليا بالنسبة إلى المستقيم (uv).	
الزاويتان $\widehat{uAy}$ و $\widehat{uBt}$ هما زاويتان متماثلتان بالنسبة إلى المستقيم (uv).	
الزاويتان $\widehat{yAv}$ و $\widehat{uBt}$ هما زاويتان داخليتان من نفس الجهة بالنسبة إلى المستقيم (uv)	
– إذا قطع مستقيم مستقيمين متوازيين فإنّ كلّ زاويتين متبادلتين داخليّا متقايستان. – مستقيمان وقاطع لهما يكوّنان زاويتين متبادلتين داخليا متقايستين هما مستقيمان متوازيان.	
– إذا قطع مستقيم مستقيمين متوازيين فإنّ كلّ زاويتين متماثلتين متقايستان. – مستقيمان وقاطع لهما يكوّنان زاويتين متماثلتين متقايستين هما مستقيمان متوازيان.	
– إذا قطع مستقيم مستقيمين متوازيين فإنّ كلّ زاويتين داخليتين من نفس الجهة بالنسبة إلى القاطع متكاملتان. – مستقيمان وقاطع لهما يكوّنان زاويتين داخليتين من نفس الجهة متكاملتان هما مستقيمان متوازيان.	
مجموع أقيسة زوايا مثلث تساوي **180°**.	
مجموع أقيسة رباعي محدّب يساوي **360°**.	

تمارين

1 لاحظ الشكل المقابل حيث $(xy)//(BC)$ و $(AH)\perp(BC)$

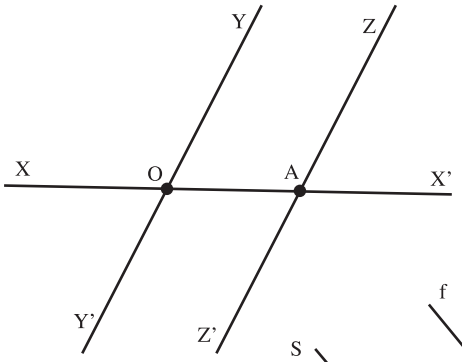


أ) أذكر زاويتين متتامّتين.

ب) أذكر زاويتين متكاملتين وغير متقايستين.

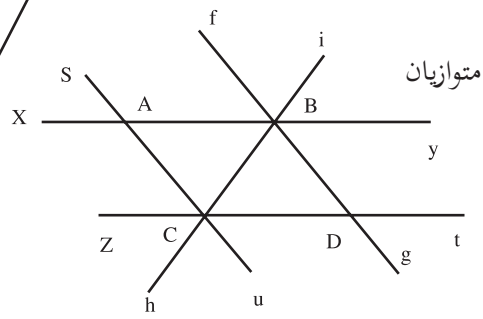
ج) أذكر زاويتين متبادلتين داخليا.

2 لاحظ الشكل المقابل حيث (yy') و (zz') مستقيمان متوازيان



بيّن أنّ $\widehat{xOy} = \widehat{x'Az'}$

3 لاحظ الشكل المقابل حيث (xy) و (zt) متوازيان



و (su) و (fg) متوازيان أيضا.

أنقل الجدول التّالي على كراسك ثمّ أكمله.

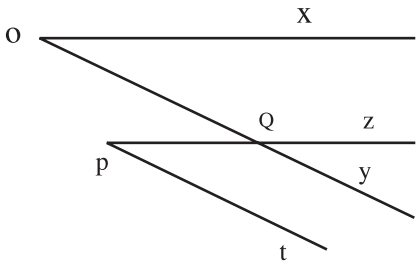
الزاوية	زاوية متبادلة داخليّا مع	زاوية متماثلة لـ	زاوية داخلية من نفس الجهة مع
$\widehat{yBg}$			
$\widehat{zCi}$			
$\widehat{fBh}$			
$\widehat{uCi}$			

أ) أرسم شبه منحرف PQRS قاعدتاه $[PQ]$ و $[RS]$ حيث $PQ = 3cm$ و $QR = 4cm$ و $\hat{P} = 108°$ و $\hat{Q} = 130°$.

ب) أحسب $\hat{R}$ و $\hat{S}$ باستعمال الزوايا المتكاملة و المتبادلة داخليا.

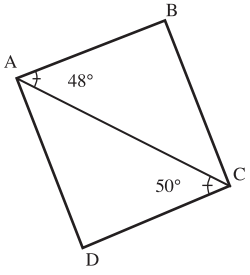
4 لاحظ الشكل المقابل حيث $[Pz]//[Ox]$ و $[Pt]//[Oy]$.

بيّن أنّ $\widehat{xOy} = \widehat{zPt}$.



5 تأمّل الشكل المقابل.

ما هي الوضعيّة النسبيّة للمستقيمين (AB) و (DC) ؟



6 **1) أ)** أرسم مثلّثا RST.

ب) ابن نصف المستقيم $[Rz]$ منصف الزاوية $\widehat{SRT}$ الّذي يقطع (ST) في النقطة E

ج) ابن المستقيم (xy) المارّ من T والموازي لـ (RE) الّذي يقطع (RS) في F

2) أ) بيّن أنّ $\widehat{RTF} = \widehat{ERT}$ و $\widehat{SRE} = \widehat{RFT}$

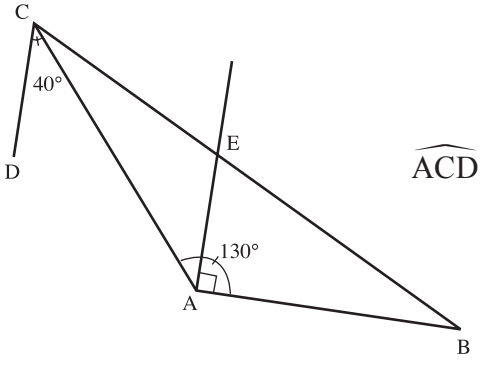
ب) ما هي طبيعة المثلّث RFT ؟

7 أرسم مثلّثا SVT حيث $ST = 4cm$ و $SV = 6cm$ و $VT = 8cm$.

ب) عيّن النقطة E من $[TS]$ لا تنتمي إلى $[TS]$ حيث $SE = 1.5cm$.

ج) أرسم المستقيم (xy) المارّ من E والموازي لـ (VT) والّذي يقطع (SV) في النقطة F.

د) قارن زوايا المثلّثين SVT و SEF .



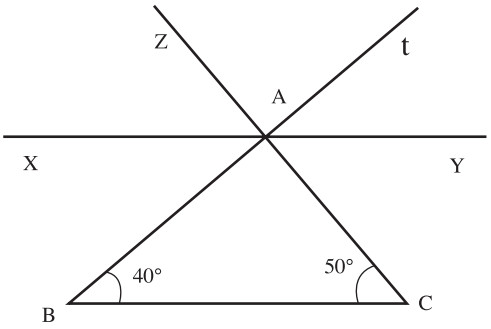
8 لاحظ الشكل المقابل حيث: $\widehat{CAB} = 130°$ و $\widehat{ACD} = 40°$

و $(AE) \perp (AB)$.

بيّن أنّ المستقيم (CD) عمودي على المستقيم (AB)

9 أنقل الشكل المقابل على كراسك حيث $(xy)//(BC)$

أحسب $\widehat{BAx}$ و $\widehat{tAy}$ و $\widehat{xAz}$ و $\widehat{zAt}$



10 **1)** أرسم مثلثا MNP حيث $NP = 7cm$ و $\hat{N} = 70°$ و $\hat{P} = 55°$

و عيّن النقطة E من $[MP]$ حيث $PE = 3cm$

2) أ- ابن المستقيم المار من E والموازي لـ (NP) الّذي يقطع (MN) في F

ب- أحسب $\hat{E}$ و $\hat{F}$ زاويتي شبه المنحرف NPEF

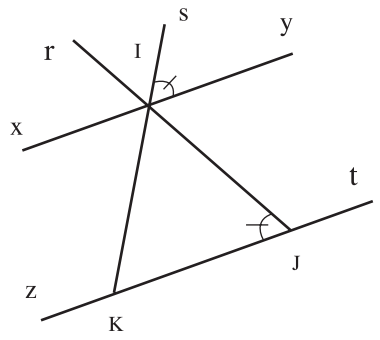
11 لاحظ الشكل المقابل حيث المستقيمان **(xy)** و (zt) متوازيان

و $\widehat{tJr} = 120°$ و $\widehat{IJK} = \widehat{yIs}$

1) أوجد كلّ من $\widehat{IJK}$ و $\widehat{IKJ}$ و $\widehat{JIy}$ معلّلا جوابك.

2) ما هي إذن طبيعة المثلث IJK ؟

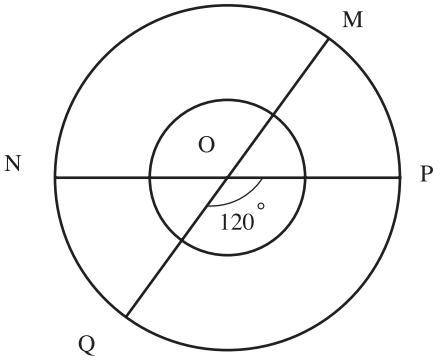
3) ماذا يمثّل $[Iy]$ بالنسبة إلى الزاوية $\widehat{SIJ}$ ؟



12 الدائرتان المقدمتان في الشكل المقابل لهما نفس المركز O.

1) ما هو قيس كلّ من الزاويتين $\widehat{OMN}$ و $\widehat{OQP}$ ؟

2) ما هي الوضعية النسبيّة للمستقيمين (MN) و (PQ) ؟



13 أرسم مثلّثا UVW متقايس الضلعين قمّته الرئيسيّة U

2) عيّن نقطة A على الضلع $[UV]$ ثم ارسم المستقيم المارّ من A و الموازي لـ (VW) يقطع (UW) في B

3) أ- قارن زاويتين $\hat{A}$ و $\hat{B}$ في المثلث UAB

ب- ما هي إذن طبيعة المثلث UAB ؟

(أنجز نفس العمل معتبرا المثلث UVW متقايس الأضلاع)

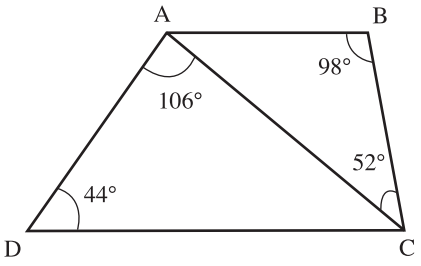
14 أ – ارسم مثلثا RST حيث $\widehat{RTS}$ زاوية حادّة و $\widehat{RST} = 54°$ ثمّ ارسم ارتفاعه [RA].

ب – عيّن النقطة B من [RT] بحيث $\widehat{RAB} = 36°$

2) هل أنّ (RS) و(AB) متوازيان؟ علّل ذلك.

15 تأمّل الشكل المقابل ثمّ أحسب قيس الزاويتين $\widehat{BAC}$ و $\widehat{ACD}$

استنتج طبيعة الرباعي ABCD.



16 **1)** ارسم **زاوية** $\widehat{xOy}$ قيسها 120° ثم منصفها [Oz].

2) عين نقطة A على [Oz] ونقطة B علي [Oy] حيث OA=OB.

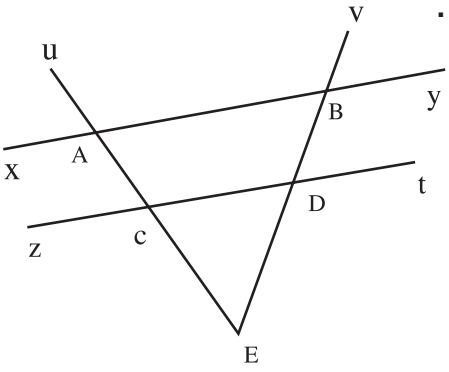
3) بين أنّ (Ox) و (AB) متوازيان.

17 أرسم متوازي الأضلاع OPQR ثم منصف الزاوية $\widehat{POR}$ الذي يقطع (PQ) في E.بين أن PE=QR.

18 أرسم متوازي الأضلاع EFGH حيث $\widehat{FGH} = 70°$ و $\widehat{HEG} = 35°$.

ما هي طبيعة المثلث EHG ؟

19 تأمّل الشكل المقابل حيث (xy)//(zt).

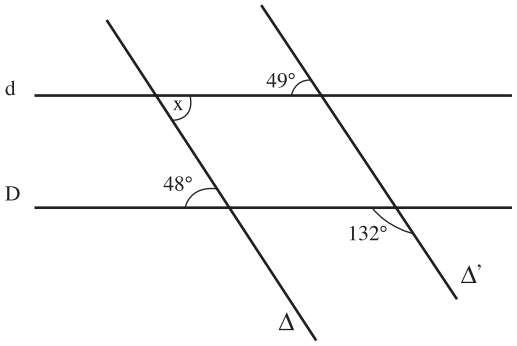


أنقل الجدول التالي

ثمّ أجب بصواب أو خطأ عن كلّ اقتراح من الاقتراحات التالية :

$\widehat{uAB}$ و $\widehat{BAC}$ متجاورتان ومتتامتان	
$\widehat{CDE} = \widehat{vBy}$	
$\widehat{xAu} = \widehat{zCu}$	
$\widehat{vBx} = \widehat{tDE}$	
$\widehat{vBy}$ و $\widehat{CDE}$ متبادلتان داخليا	
$\widehat{xAu}$ و $\widehat{zCu}$ متماثلتان	
$\widehat{vBx}$ و $\widehat{tDE}$ متقابلتان بالرأس	
$\widehat{vBx}$ و $\widehat{CDE}$ متكاملتان	

20 تأمّل الشكل المقابل

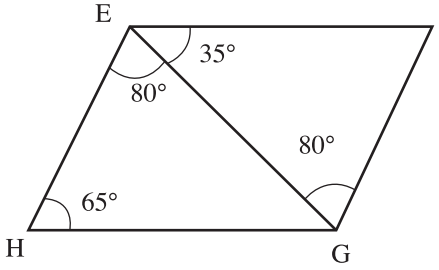


أنقل الجدول التالي ثمّ أجب بصواب أو خطأ عن كلّ اقتراح من الاقتراحات التالية :

D و d متوازيان	
Δ و Δ' متوازيان	
x=48°	

ج) تأمّل الرسم المقابل.

هل أنّ [EG] و [FH] لهما نفس المنتصف ؟ علّل جوابك.



21 **1)** أ - أرسم مثلثا ENS حيث $\widehat{ENS} = 30°$ و $\widehat{ESN} = 50°$.

ب – أرسم منصّف الزاوية $\widehat{SEN}$ الذي يقطع (BC) في I .

ج – أرسم المستقيم (xy) المار من N والموازي للمستقيم (EI).

2) أحسب قيس كل زاوية من الزوايا التالية : $\widehat{SEN}$ و $\widehat{SNx}$ و $\widehat{ENy}$.

22 **1)** أرسم مثلثا FGH حيث $\widehat{FGH} = 70°$ و $\widehat{FHG} = 46°$ أحسب $\widehat{GFH}$.

2) ليكن [Fx] منصف الزاوية $\widehat{GFH}$ و [FK] الارتفاع الصادر من F للمثلثFGH.

أحسب $\widehat{KFx}$.

3) نعتبر I نقطة تقاطع منصفا الزاويتين $\widehat{FGH}$ و $\widehat{FHG}$. بين أن I تنتمي للمستقيم (Fx).

أحسب $\widehat{GIH}$.

4) الارتفاعان الصادران من G و H يتقاطعان في النقطةJ. أحسب $\widehat{GJH}$.

23 أرسم مثلثا ABC متقايس الضلعين قمته الرئيسية A ونقطة M من [AB] ثمّ أرسم المستقيم المار من M والموازي للمستقيم (BC) الّذي يقطع [AC] في النقطة N.

1) برهن أنّ $\widehat{AMN} = \widehat{ABC}$ و $\widehat{ANM} = \widehat{ACB}$. استنتج طبيعة المثلث AMN.

2) أرسم المستقيم المار من M والموازي للمستقيم (AC) الّذي يقطع (BC) في النقطة F و المستقيم المار من N والموازي للمستقيم (AB) الّذي يقطع (BC) في النقطة E.(MF) و (NE) يتقاطعان في النقطة O.

3) بين أنّ كلّ مثلث من المثلثات التّالية متقايس الضلعين : BMF و CNE و OEF.

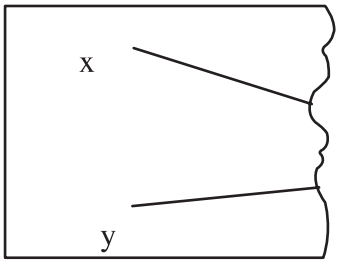
24 ارسم مثلثا OPL ثم [Px) و [Ly) منصفي الزاويتين $\hat{P}$ و $\hat{L}$

المستقيم المار من O و الموازي لـ [Px) يقطع (PL) في D و المستقيم الموازي لـ [Ly) و المار من O يقطع (PL) في E

بيّن أن محيط المثلث OPL يساوي DE

25 رسمنا زاوية $\widehat{xOy}$ إلاّ أنّ جزءا من الورقة قد احترق.

ما هو قيس تلك الزاوية (أعط قيمة تقريبية) واذكر طريقة لانجاز ذلك دون إتمام المستقيمين.



تقايس المثلّثات

I تقايس المثلّثات

II حالات تقايس المثلثات

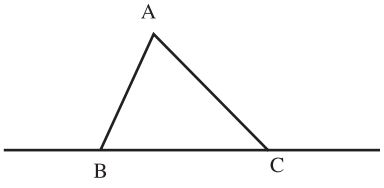
III حالات تقايس المثلثات القائمة

IV المثلثات المتقايسة الضلعين- المثلثات المتقايسة الأضلاع

V الخاصيّة المميّزة لمنصّف الزّاوية - الدائرة المحاطة بمثلّث

نقايس المثلّثات

أستحضـــر :



1

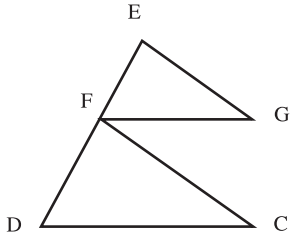
1. أنقل الشكل المقابل.

أ) ابن النقطة 'A مناظرة النقطة A بالنسبة إلى (BC)؟

ب) بيّن أنّ AB=A'B و AC = A'C .

ج) بيّن أنّ $\widehat{BAC} = \widehat{BA'C}$.

2 . في الشكل المقابل لدينا : النقاط D و E و F على استقامة واحدة و (EG)//(FC) و (FG)//(DC).



أ) بيّن أنّ $\widehat{FEG} = \widehat{DFC}$ و $\widehat{EFG} = \widehat{FDC}$

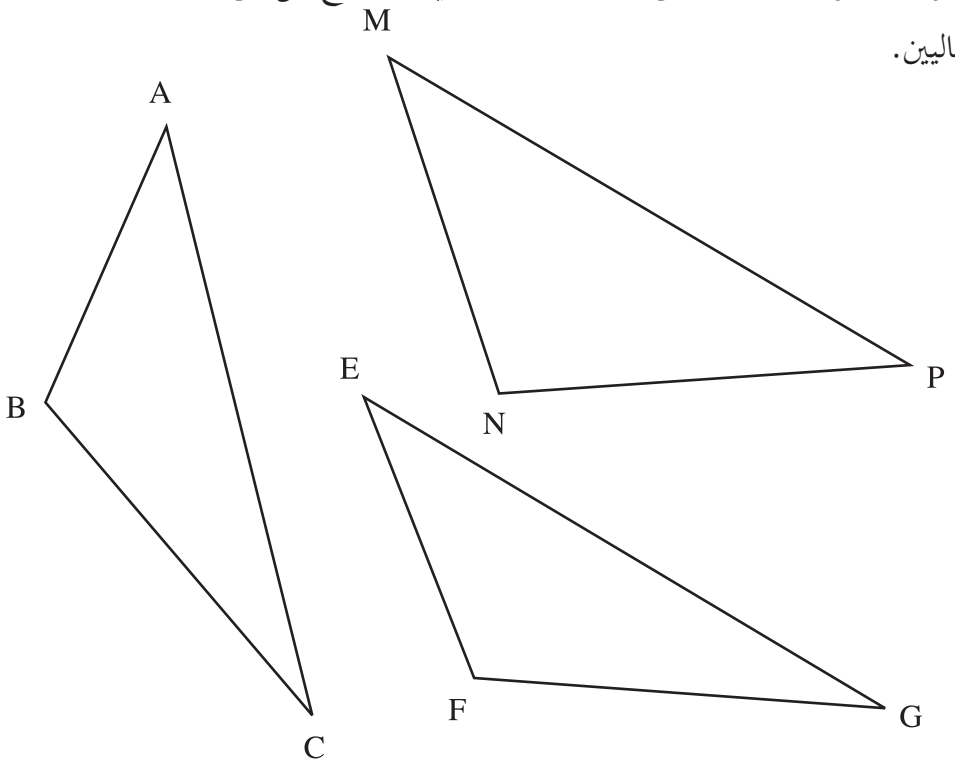
ب) بيّن أنّ $\widehat{EGF} = \widehat{FCD}$

استكشـــف واطبق :

I نقايس المثلّثات

نشاط 1 أرسم على ورق شفاف مثلثا أبعاده 3cm و 4cm و 6cm.

1) تحقّق بواسطة الورق الشفاف من تطابق المثلث الذي رسمته مع كلّ من المثلثين ABC و EFG التّاليين.



مثلثان متقايسان هما مثلثان متطابقان.

2) قارن الأضلاع AB و EF ثمّ AC و EG ثمّ BC و FG.قارن الزوايا $\hat{A}$ و $\hat{E}$ ثمّ $\hat{B}$ و $\hat{F}$ ثمّ $\hat{C}$ و $\hat{G}$.

3) هل أنّ المثلثين MNP و ABC متطابقان ؟

إذا تقايس مثلثان فإنّ أضلاعهما متقايسة مثنى مثنى و زواياهما متقايسة مثنى مثنى

مصطلحات :

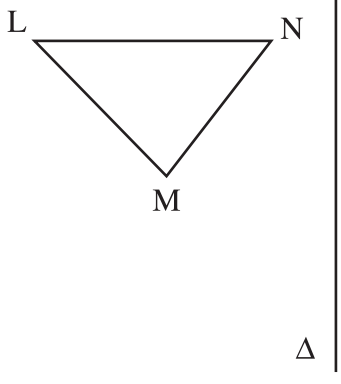
في المثلثين ABC و EFG تنطبق القمة A على القمة E فنقول أن كلاّ منهما هي نظيرة الاخرى كما ينطبق الضلع [AB] على الضلع [EF] فنقول أيضا أن كلاّ منهما هو نظير الاخر وتنطبق الزاوية $\widehat{BAC}$ على الزاوية $\widehat{FEG}$ فنقول كذلك أن كلاّ منهما هي نظيرة للأخرى.

اطبّق :

1 أنقل الرسم المقابل على كراسك .

أ) ابن النقاط L' و M' و N' مناظرات L و M و N على التوالي بالنسبة إلى المستقيم Δ .

ب) تحقّق بواسطة الورق الشفاف أنّ المثلّثين LMN و L'M'N' متقايسان.



2 1) أرسم مثلثا ABC و نقطة O خارجه عنه.

2) ابن النقاط A' و B' و C' مناظرات النقاط A و B و C بالنسبة إلى O .

3) أثبت أن أضلاع المثلّثين ABC و A'B'C' متقايسة مثنى مثنى.

4) أثبت أن زوايا المثلثين ABC و A'B'C' متقايسة مثنى مثنى.

5) تحقّق بواسطة الورق الشفاف أنّ المثلّثين ABC و A'B'C' متطابقان

إذا تقايست زوايا مثلثين مثنى مثنى و كذلك أضلاعهما مثنى مثنى فإنّ المثلثين متقايسين.

ليكن ABC و EFG مثلثين.

إذا كان $\hat{A}=\hat{E}$ و $\hat{B}=\hat{F}$ و $\hat{C}=\hat{G}$ و AB=EF و AC=EG و BC=FG فإنّ المثلثين ABC و EFG متقايسان.

3 أ) أرسم متوازي أضلاع ABCD و مركزه O.

ب) تحقق أنّ المثلثين AOB و COD متقايسان.

ج) تحقّق أنّ المثلثين ABC و CDA متقايسان.

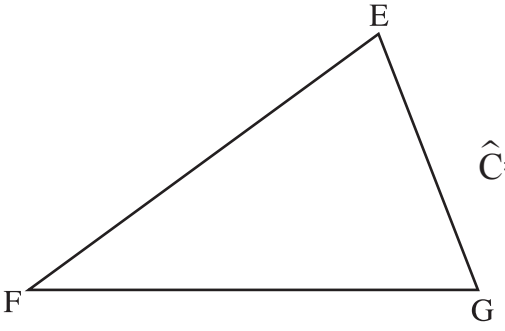
II حالات تقايس المثلثات

الحالة الأولى لتقايس المثلثات

نشاط 1 أرسم على ورق شفاف مثلثا MNP حيث MN=3cm و $\widehat{M}=25°$ و $\widehat{N}=70°$

2) تحقق أنّ المثلث الّذي رسمته ينطبق على المثلث الّذي رسمه أحد زملائك

3) يمثّل الرسم المقابل مثلثا EFG

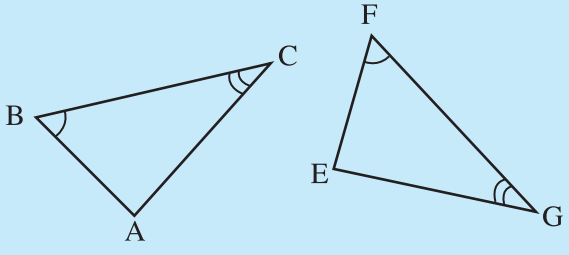


أ) أرسم مثلثا ABC حيث BC=FG و $\hat{B}=\hat{F}$ و $\hat{C}=\hat{G}$

ب) تحقق أنّ المثلثين ABC و EFG متقايسان.

4) ماذا تستنتج ؟

الحالة الأولى: يتقايس مثلثان إذا قايس ضلع والزاويتان المجاورتان له في أحدهما ضلعا والزاويتين المجاورتين له في الثاني



تطبيقات :

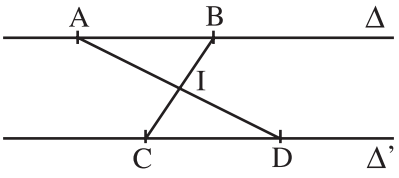
1 أ) أرسم زاوية $\widehat{xOy}$ قيسها 40° و نقطة A من منصفها $[Oz)$.

ب)ابن على $[Ox)$ نقطة B و ابن على $[Oy)$ النقطة C حيث $\widehat{OAB} = \widehat{OAC} = 60^\circ$.

ج) بيّن أنّ المثلثين OAB و OAC متقايسان

د) استنتج أنّ OC=OB.

2 لاحظ الرسم المقابل حيث Δ و Δ' مستقيمان متوازيان و $AB = CD$. I نقطة تقاطع المستقيمين (AD) و (CB).



أ) بيّن أنّ المثلثين ABI و CDI متقايسان.

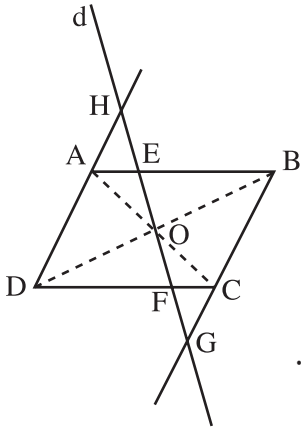
ب) استنتج أنّ النقطة I منتصف كلّ من $[AD]$ و $[BC]$

3 أ) أرسم مثلثا ABC متقايس الضلعين قمته الرئيسية A. لتكن I نقطة تقاطع منصفي الزاويتين $\widehat{ABC}$ و $\widehat{ACB}$.

ب) بيّن أنّ BI=CI.

تمرين مرفق بحل :

يمثّل الشكل المقابل متوازي الأضلاع ABCD مركزه O و d مستقيما يمرّ من O ويقطع كلاّ من (AB) في E و (CD) في F و (BC) في G و (AD) في H.



1) قارن المثلثين OBE و ODF.استنتج أنّ O هي منتصف $[EF]$.

2) بيّن أنّ O هي منتصف $[GH]$.

الحلّ :

1) في المثلثين OBE و OFD لنا $\widehat{EOB} = \widehat{DOF}$ (زاويتان متقابلتان بالرأس)

$\widehat{OBE} = \widehat{ODF}$ (زاويتان متبادلتان داخليا)

OB=OD (O منتصف [DB])

إذن المثلثان OEB و ODF متقايسان حسب الحالة الاولى لتقايس المثلثات و بالتالي فإنّ OE=OF.

و بما أنّ O و E و F على استقامة واحدة فإنّ النقطة O هي منتصف [EF].

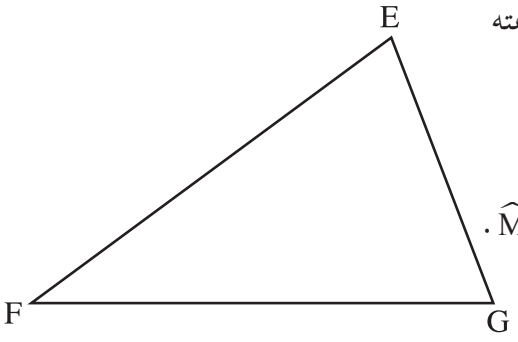
2) في المثلثين OBG و ODH لنا $\widehat{OBG} = \widehat{ODH}$ (متبادلتان داخليا) و $\widehat{BOG} = \widehat{DOH}$ (زاويتان متقابلتان بالرأس) و OB=OD. إذن المثلثان OBG و ODH متقايسان حسب الحالة الأولى لتقايس المثلثات و بالتّالي OG=OH.

وبما أنّ النقاط O و G و H على استقامة واحدة فإنّ النقطة O هي منتصف [HG].

الحالة الثانية لتقايس المثلثات :

نشاط 1 أرسم على ورق شفاف مثلثا ABC حيث AB=4cm

و AC=3cm و $\widehat{BAC} = 40°$ ثمّ تحقق أنّ المثلث الّذي رسمته ينطبق على المثلث الّذي رسمه أحد زملائك.

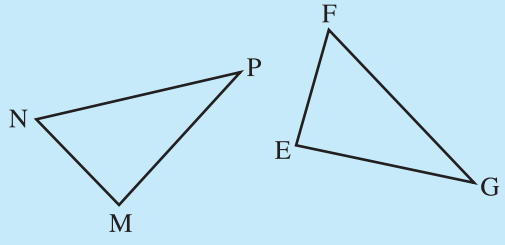


2-يمثّل الرسم المقابل مثلثا EFG

أ) أرسم مثلثا MNP حيث MN=EF و MP=EG و $\widehat{M} = \widehat{E}$.

ب) تحقق أنّ المثلثين EFG و MNP متقايسان.

ج) ماذا تستنتج ؟

الحالة الثانية : يتقايس مثلثان إذا قايس ضلعان والزاوية المحصورة بينهما في أحدهما ضلعين والزاوية المحصورة بينهما في الثاني.	

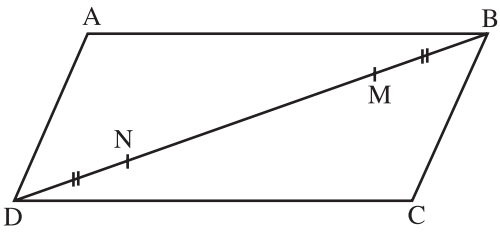
أطبّق :

1 أ) أرسم مثلثا ABC متقايس الضلعين قمته الرئيسية A.

ب) عيّن على [AB] نقطة M و على [AC] نقطة N بحيث AM=AN.

ج) قارن المثلثين ANB و AMC.استنتج أنّ CM=BN

2 لاحظ الشكل المقابل حيث ABCD متوازي الأضلاع و BM=DN .



بيّن أنّ AN=CM.

3 أ) أرسم زاوية حادّة $\widehat{xOy}$ ثمّ عيّن على [Ox) نقطتين A و B وعلى [Oy) نقطتين C و D بحيث OA = OC و OB = OD

ب) بيّن أنّ المثلثين OAD و OCB متقايسان.

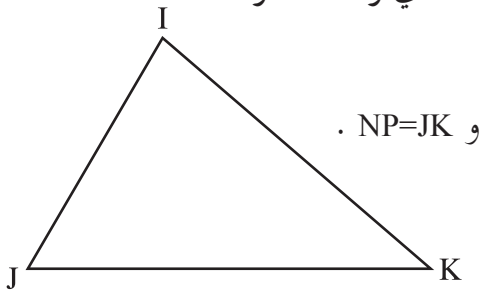
ج) استنتج أنّ AD=BC

الحالة الثالثة لتقايس المثلثات :

نشاط 1 1) أ) أرسم على ورق شفاف مثلثا ABC حيث AB=3cm و AC=5cm و BC=6cm .

ب) تحقّق أن المثلث الّذي رسمته ينطبق على المثلث الّذي رسمه أحد زملائك.

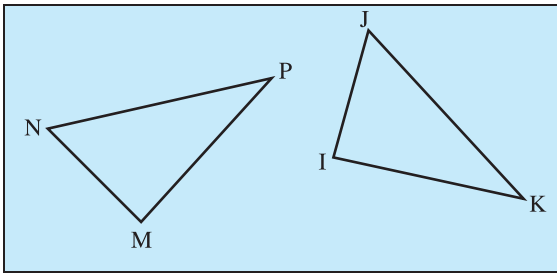
2) يمثّل الرسم المقابل مثلثا IJK



أ) أرسم مثلثا MNP حيث MN=IJ و MP=IK و NP=JK .

ب) تحقق أنّ المثلثين IJK و MNP متقايسان.

ج) ماذا تستنتج ؟

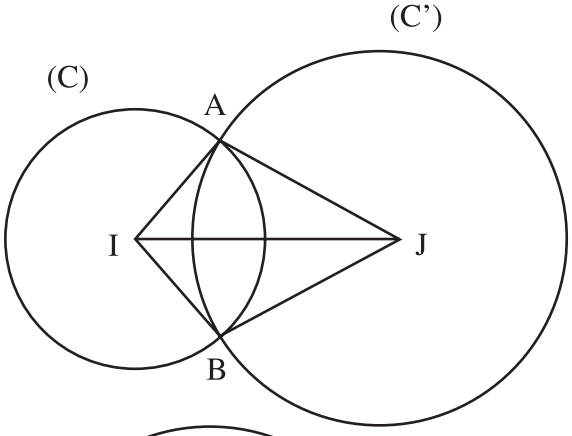
الحالة الثالثة : يتقايس مثلثان اذا قايست الأضلاع الثلاثة في احدهما الاضلاع الثلاثة في الثاني مثنى مثنى	

اطبّق:

1 أ) أرسم متوازي الأضلاع ABCD. المستقيم المار من C و الموازي للقطر [DB] يقطع المستقيم (AD) في النقطة E.

ب) ما هي طبيعة الرباعي DBCE .

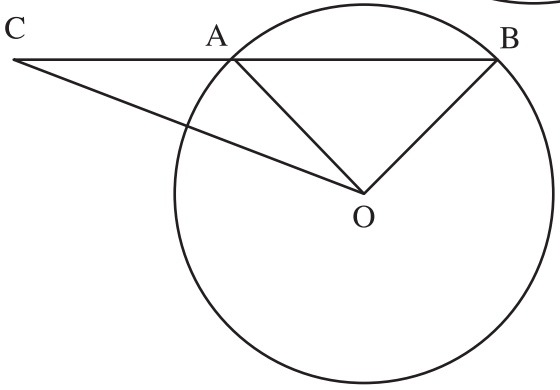
ج) استنتج تقايس المثلثين DCE و ABD.



2 تأمّل الشكل المقابل.

ب) بيّن أنّ المثلثين BIJ و AIJ متقايسان.

ج) استنتج منصف الزاوية $\widehat{AIB}$ ومنصف الزاوية $\widehat{AJB}$.



3 لاحظ الشكل المقابل

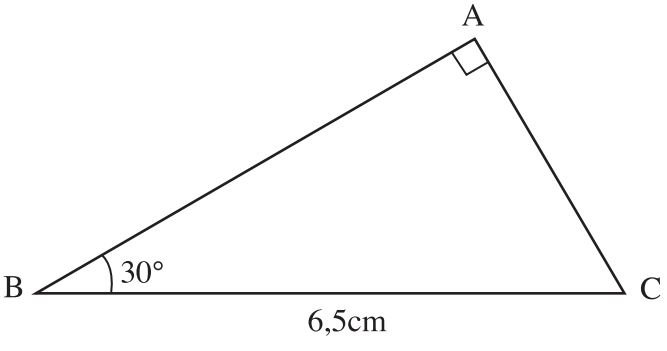
أ) يوجد في المثلث AOC ضلعان وزاوية مقايسة لضلعين وزاوية في المثلث BOC.حدد هذه العناصر.

ب) بماذا تفسر جوابك

III حالات تقايس المثلثات القائمة

حالتا تقايس مثلثين قائمين

نشاط 1 الحالة الأولى



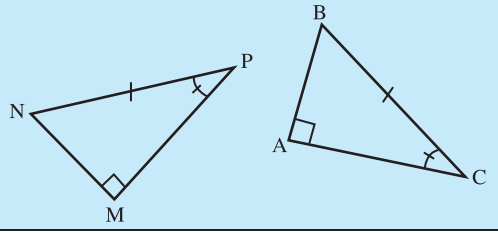
يمثّل الشكل المقابل مثلثا ABC قائم الزاوية في A

أ) ابن مثلثا MNP قائما في M بحيث $\widehat{N} = \widehat{B}$ و NP=BC .

ب) بيّن أنّ $\widehat{P} = \widehat{C}$.

ج) استنتج أنّ المثلثين ABC و MNP متقايسان .

الحالة الأولى : يتقايس مثلثان قائمان إذا قايس الوتر وزاوية حادة في أحدهما الوتر وزاوية حادة في الثاني.



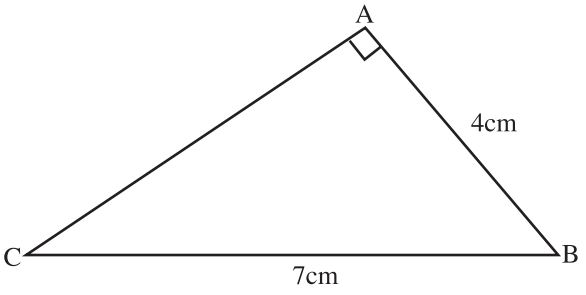
أطبّق:

1

أ) أرسم مثلثا ABC متقايس الضلعين قمته الرئيسية A.

ب) أرسم الارتفاعين [BB'] و [CC'].

ج) تأمّل الرسم وحدد مثلثين متقايسين ثمّ استنتج أنّ BB'=CC'.



نشاط 2 الحالة الثانية

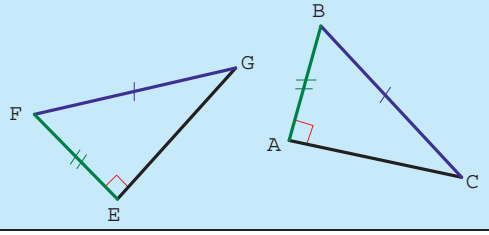
يمثّل الشكل المقابل مثلّثا ABC قائم الزاوية في A.

أ) أرسم زاوية قائمة $\widehat{xEy}$ و عين على [Ex) نقطة F بحيث EF=AB.

ب) أرسم قوسا دائريا مركزه F وشعاعه BC الذي يقطع [Ey) في نقطة G.

ج) تحقق (بواسطة البركار) من أنّ EG=AC واستنتج أنّ المثلثين ABC و EFG متقايسان.

الحالة الثانية :يتقايس مثلثان قائمان إذا قايس الوتر وضلع قائم في أحدهما الوتر وضلعا قائما في الثاني.



2 أ) أرسم زاوية قائمة $\widehat{xAy}$. لتكن B نقطة من $[Ax)$ و C من $[Ay)$ بحيث $AB=AC$.

ب) أرسم المستقيم Δ المارّ من B و العمودي على $[Ax)$.

ج) أرسم المستقيم Δ' المارّ من C والعمودي على $[Ay)$.

د) المستقيمان Δ و Δ' يتقاطعان في نقطة M. تأمّل الرسم و حدد مثلثين متقايسين

هـ) استنتج أنّ نصف المستقيم $[AM)$ هو منصف الزاوية $\widehat{xAy}$.

و) ما هو قيس الزاوية $\widehat{CAM}$.

3 1) أرسم دائرة $(\mathcal{C})$ مركزها O ثمّ عيّن نقطتين A و B ينتميان إلى $(\mathcal{C})$ وغير متقابلين قطريّا.

ب) ابن المماسّين لـ $(\mathcal{C})$ في A و B الّذين يتقاطعان في T.

2) أ) بيّن أنّ $TA=TB$.

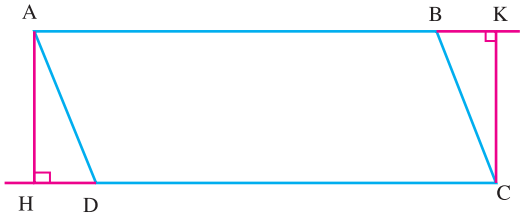
ب) استنتج أنّ (OT) هو الموسط العمودي للقطعة $[AB]$.

3) بيّن أنّ $[TO)$ هو منصّف الزّاوية $\widehat{ATB}$.

تمرين مرفق بحل:

أرسم متوازي الأضلاع ABCD و النقطتين H و K المسقطين العموديين على التوالي لـ A و C على (DC) و (AB)

بيّن أنّ $DH = BK$

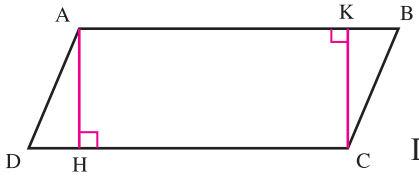


الحلّ:

المثلثان AHD و CBK قائمان على لاتوالي في H و K

لنا $AD=BC$ لأنّ ABCD متوازي الأضلاع وبالتالي وترا المثلثان متقايسان.(AB) و (DC) متوازيان و AH هو البعد بينهما وكذلك CK.

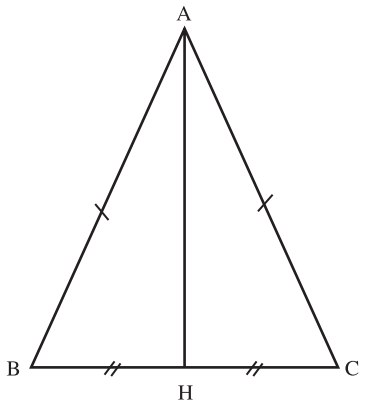
إذا $AH=CK$. إذا المثلثان القائمان AHD و CKB وتراهما متقايسان و لهما ضلعان قائمان متقايسان إذا هما مثلثان متقايسان و بالتّالي $DH=BK$



IV المثلثات المتقايسة الضلعين ـ المثلثات المتقايسة الأضلاع

1 المثلثات المتقايسة الضلعين

نشاط 1 في الرسم المقابل ABC مثلث متقايس الضلعين قمّته الرّئيسيّة A و النقطة H منتصف [BC].

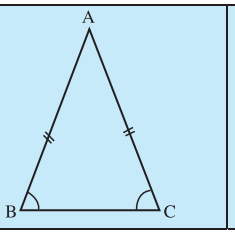


1) بيّن أنّ (AH) هو الموسّط العمودي لقطعة المستقيم [BC]

2) قارن المثلثين ABH و ACH

3) استنتج أنّ : أ) [AH] منصّف الزّاوية $\widehat{BAC}$.

ب) $\widehat{B} = \widehat{C}$.



زاويتا القاعدة في مثلّث متقايس الضلعين متقايستان.

ملاحظة: في مثلّث متقايس الضلعين ABC (قمّته الرّئيسيّة A)

*الموسّط الصادر من A ينطبق على الارتفاع الصادر من A.

*الموسّط العمودي للقاعدة [BC] تحمل منصّف الزّاوية $\widehat{BAC}$ كذلك الموسّط الصادر من A.

أطبّق:

1) أرسم مثلثا ROI متقايس الضلعين قمته الرئيسية R ثمّ أرسم منصّف الزّاوية $\widehat{ORI}$ الّذي يقطع [OI] في M.

2) أرسم نقطة Q من [RM] مغايرة لـ R وM. بيّن أنّ المثلث OQI متقايس الضلعين.

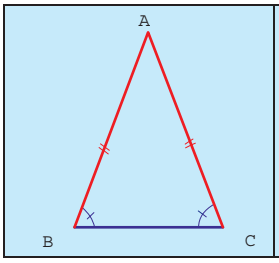
3) بيّن أنّ (QM) منصف الزاوية $\widehat{OQI}$.

نشاط 2 أرسم مثلّثا ABC بحيث $\widehat{ABC}=\widehat{ACB}$

أرسم منصّف الزّاوية $\widehat{BAC}$ الّذي يقطع [BC] في النقطة I.

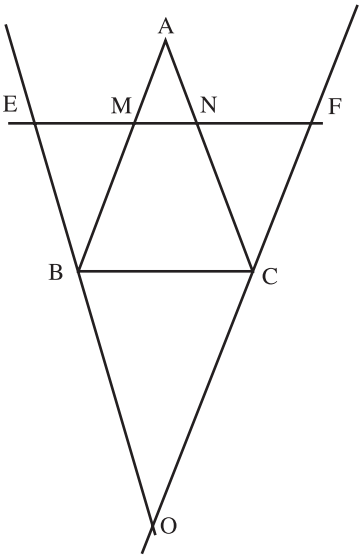
1) أثبت أنّ $\widehat{AIB}=\widehat{AIC}$.

2) أثبت تقايس المثلثين AIB و AIC واستنتج أنّ المثلّث ABC متقايس الضلعين قمّته الرّئيسيّة A.



إذا تقايست زاويتان في مثلّث فإنّ هذا المثلّث متقايس الضلعين.

تطبيق:



1 في الشكل المقابل ABC مثلث متقايس الضلعين قمته الرئيسية A و (AB)//(OF) و (AC)//(OE) و (EF)//(BC)

1) بين أنّ المثلث AMN متقايس الضلعين.

2) قارن المثلثين BME وCNF.

3) استنتج أنّ المثلث OEF متقايس الضلعين.

2 1) أ) أرسم مثلثا AIR متقايس الضلعين قمته الرئيسية A.

ب) أرسم الموسطين [II'] و[RR'] ثمّ بيّن أنّ المثلثين II'R وRR'I متقايسان.

ج) ماذا تستنتج بالنسبة لبقية عناصر المثلثين؟

2) لتكن M نقطة تقاطع [II'] و[RR']. بيّن أنّ المثلث MIR متقايس الضلعين.

3) برهن على أنّ (MA) هو منصف الزاوية $\widehat{I'MR}$.

4) المستقيم المارّ من A و الموازي لـ (IR) يقطع (II') في F و (RR') في E.

بيّن أنّ ME=MF و IE=RF.

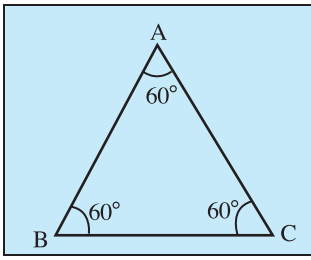
2 المثلثات المتقايسة الأضلاع

نشاط 1 أرسم مثلّثا ABC متقايس الضلعين قيس إحدى زواياه 60°.

بيّن أنّ المثلث ABC متقايس الأضلاع وأنّ قيس كلّ زاوية من زواياه 60°.

مثلّث متقايس الأضلاع هو مثلّث متقايس الضلعين قيس إحدى زواياه 60°

نشاط 2 أرسم مثلّثا ABC متقايس الأضلاع. بيّن أنّ قيس كلّ زاوية من زواياه 60°.

زوايا مثلّث متقايس الأضلاع متقايسة وقيس كلّ منها 60°.	

تطبيق:

أ) أرسم مثلّثا ABC قائم الزّاوية في A حيث $\hat{B}=60°$ و AB=3cm.

ب) نعتبر النقطة D مناظرة النقطة B بالنسبة إلى A.

بيّن أنّ المثلّث BCD متقايس الأضلاع واستنتج طول أحد أضلاعه.

V الخاصيّة المميّزة لمنصّف الزّاوية - الدائرة المحاطة بمثلّث

نشاط 1 1) أ) أرسم زّاوية $\widehat{xOy}$ وابن منصفها $[Oz)$

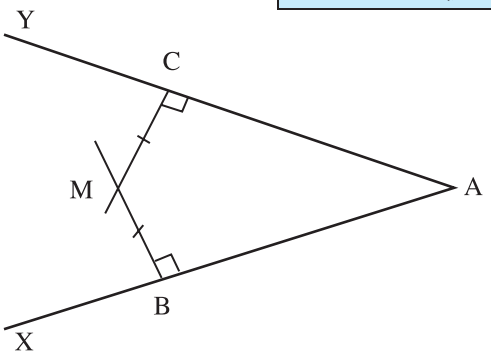
ب) عيّن نقطة M من $[Oz)$ مخالفة للنقطة O.

ج) ابن النقطتين H و K المسقطين العموديين للنقطة M على التوالي على المستقيمين (Ox) و (Oy)

2) أ) قارن المثلثين OMH و OMK

ب) أستنتج أنّ MK=MH.

تبعد كلّ نقطة من منصّف زاوية نفس البعد عن ضلعي تلك الزّاوية.



نشاط 2 تأمّل الشكل المقابل.

أ) قارن المثلثين AMB و AMC.

ب) استنتج أن $[AM]$ منصف الزاوية $\widehat{xAy}$.

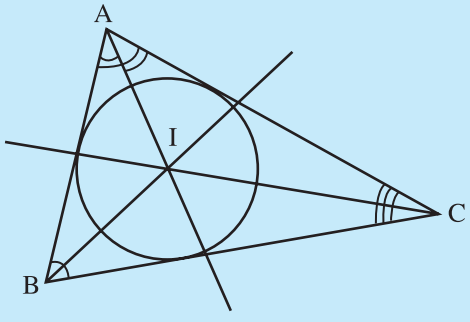
إذا كانت نقطة متساوية البعد عن ضلعي زاوية فهي تنتمي إلى منصّف تلك الزّاوية.

نشاط 3 أرسم مثلّثا ABC والمنصّفين $[Ax)$ و $[By)$ اللذان يتقاطعان في نقطة O .

نعتبر M و N و P المساقط العموديّة للنقطة O على التّوالي على المستقيمات (AB) و (AC) و (BC).

أ) أثبت أنّ OM=ON=OP واستنتج أنّ O تنتمي لمنصّف الزّاوية $\widehat{C}$.

ب) أرسم الدّائرة Γ الّتي مركزها O و شعاعها OM.ما هي وضعيتها بالنسبة إلى المثلّث ABC ؟

يتقاطع منصّفات زاويا مثلّث في نقطة مشتركة هي مركز الدّائرة المحاطة بالمثلّث.	

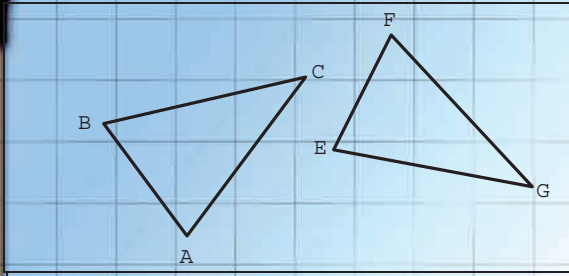
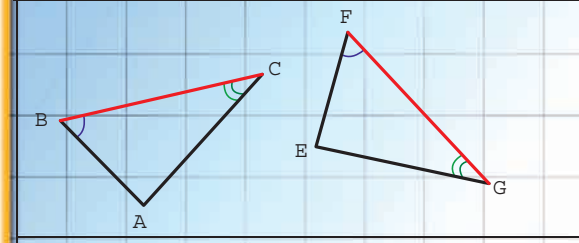
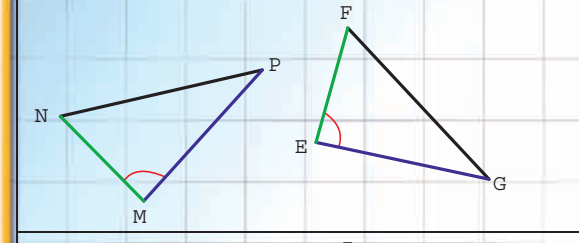
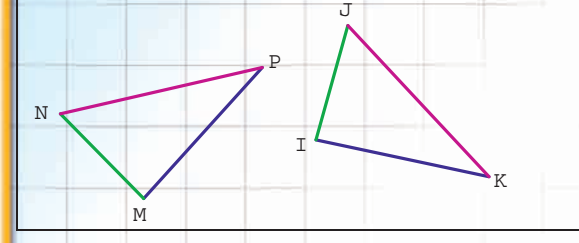
اطبّق:

أرسم زاوية غير منبسطة $\widehat{xOy}$ وعيّن نقطة A من $[Ox)$ مخالفة للنقطة O ونقطة B من $[Oy)$ بحيث $OA=OB$. المستقيمان العموديان على (Ox) و (Oy) على التّوالي في A و B يتقاطعان في نقطة M.

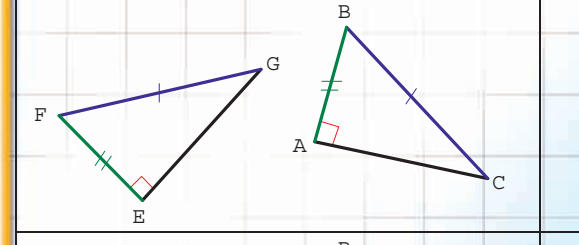
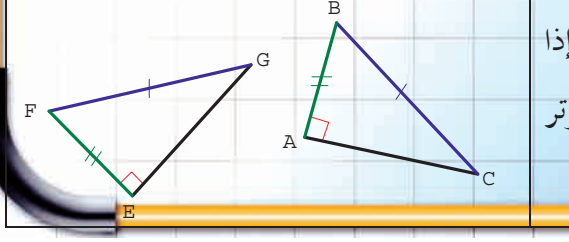
أ) أثبت أنّ $[OM)$ هو منصّف للزّاوية $\widehat{xOy}$

ب) استخرج من هذا الرسم طريقة لبناء منصّف زاوية.

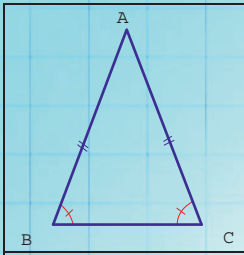
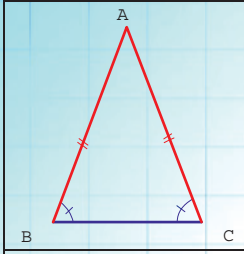
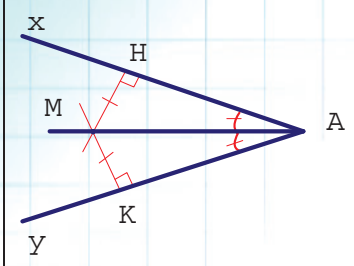
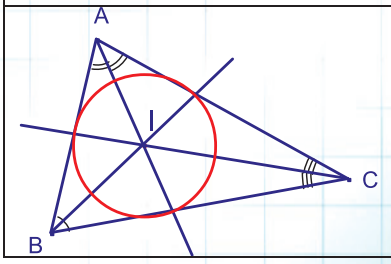
أحوصـل

مثلثان متقايسان هما مثلثان أضلاعهما متقايسة مثنى مثنى وزواياهما متقايسة مثنى مثنى.	
الحالة الأولى :يتقايس مثلثان إذا قايس ضلع والزاويتان المجاورتان له في أحدهما ضلعا والزاويتين المجاورتين له في الثاني.	
الحالة الثانية: يتقايس مثلثان اذا قايس ضلعان والزاوية المحصورة بينهما في احدهما ضلعين والزاوية المحصورة بينهما في الثاني.	
الحالة الثالثة: يتقايس مثلثان إذا قايست الأضلاع الثلاثة في أحدهما الاضلاع الثلاثة في الثاني مثنى مثنى	

نقايس المثلثات القائمة

الحالة الأولى : يتقايس مثلثان قائمان إذا قايس الوتر وزاوية حادّة في أحدهما الوتر وزاوية حادّة في الثاني.	
الحالة الثانية : يتقايس مثلثان قائمان إذا قايس الوتر وضلع قائم في أحدهما الوتر وضلعا قائما في الثاني.	

تطبيقات لتقايس المثلثات

زاويتا القاعدة في مثلّث متقايس الضلعين متقايستان.	
إذا تقايست زاويتان في مثلّث فإنّ هذا المثلّث متقايس الضلعين	
تبعد كلّ نقطة من منصّف زاوية نفس البعد عن ضلعي تلك الزّاوية. إذا كانت نقطة متساوية البعد عن ضلعي زاوية فهي تنتمي إلى منصّف تلك الزّاوية.	
تتقاطع منصّفات زوايا مثلّث في نقطة مشتركة هي مركز الدّائرة المحاطة بالمثلّث.	

تمارين

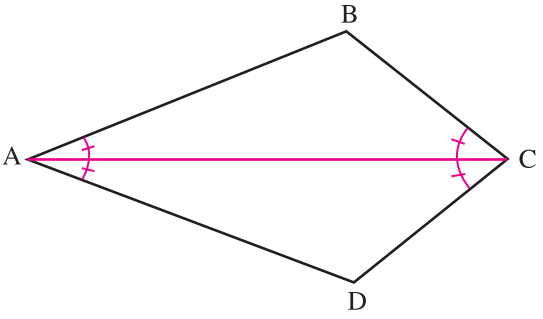
1 ابن مثلثين متقايسين ABC و MNP بحيث $\widehat{B}=75°$ و $\widehat{M}=30°$ و AB=3cm.

2 أ) أرسم مثلثا ABC قائم الزاوية في A حيث $\widehat{ABC}=30°$. المستقيم العمودي على (BC) في C يقطع (AB) في النقطة D.

ب) حدّد في المثلثين ABC و DBC ضلعا وزاويتين متقايستين مثنى مثنى.

ج) ماذا تستنتج ؟

3 تأمّل الشكل المقابل.



أ) بيّن أنّ المثلثين ADC و ABC متقايسان.

ب) استنتج أنّ (AC) و (DB) متعامدان

4 أرسم زاوية $\widehat{xAy}$ ومنصّفها [Az]. I نقطة من [Az] مخالفة للنقطة A. أرسم المستقيم المارّ من I و العمودي على (Az) الّذي يقطع (Ax) و (Ay) على التّوالي في B و C.

بيّن أنّ $\widehat{B}=\widehat{C}$.

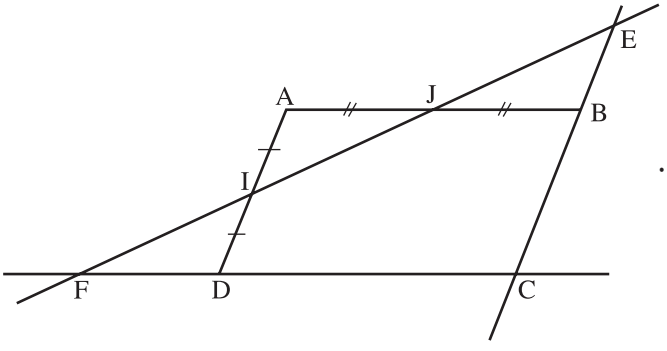
5 أرسم دائرة (ℰ) مركزها O و [AB] و [CD] قطرين لها.

1) بيّن أنّ المثلثين OAD و OBC متقايسان.

2) استنتج أنّ المثلثين ABC و ADB متقايسان

6 لاحظ الرسم المقابل حيث ABCD متوازي الأضلاع

والنقطتين I و J على التوالي منتصفي القطعتين [AD] و [AB]



1) بيّن أنّ المثلثين FDI و JAI متقايسان.

2) استنتج أنّ FI=IJ=JE.

7 1)أ) أرسم مثلثا ABC والنقطة I منتصف [AB].

المستقيم المار من I و الموازي لـ (BC) يقطع (AC) في النقطة J و المستقيم المار من I و الموازي لـ (AC) يقطع (BC) في النقطة K

ب) بيّن أنّ المثلثين AIJ و BIK متقايسان.

2) ما هي طبيعة الرباعي IJCK ؟

3) استنتج أنّ BC=2IJ .

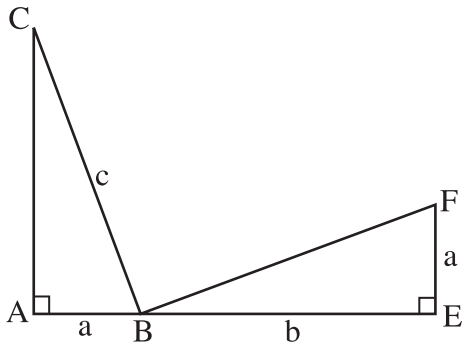
8 **1)** أ) أرسم دائرة **ح** مركزها O و **A** و **B نقطتين من الدائرة ح**.

ب) إبن منصف الزاوية $\widehat{AOB}$ **الذي** يقطع **ح** في M.

2) قارن المثلثين OAM و OBM

3) استنتج أنّ MB=MA و أنّ [MO] هو منصّف الزاوية $\widehat{AMB}$

9 تأمّل الرسم المقابل



1)أ) قارن المثلّثين ABC و EFB

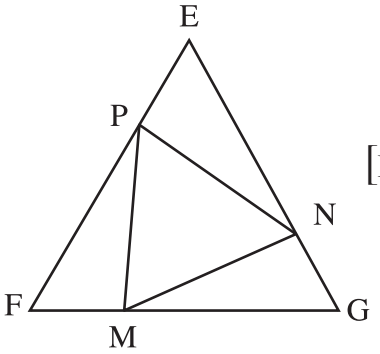
ب) استنتج أنّ BFC مثلّث قائم و متقايس الضلعين

2)أ) احسب مساحة شبه المنحرف AEFC بطريقتين

ب) استنتج أنّ $a^2+b^2=c^2$

أي أنّ $AB^2+AC^2=BC^2$

10 تأمّل الرسم المقابل حيث المثلث EFG متقايس الأضلاع.



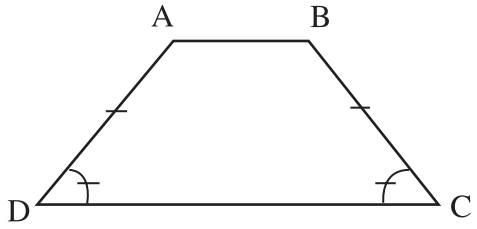
والنقاط M و N و P تنتمي على التوالي إلى [FG] و [EG] و [EF]

حيث FM=GN=EP

بيّن أنّ المثلثات FMP و GNM و NEP متقايسة مثنى مثنى

استنتج طبيعة المثلث MNP

11 1) أنقل الشكل المقابل على كراسك



حيث ABCD رباعي و AD=BC و $\widehat{ADC} = \widehat{BCD}$

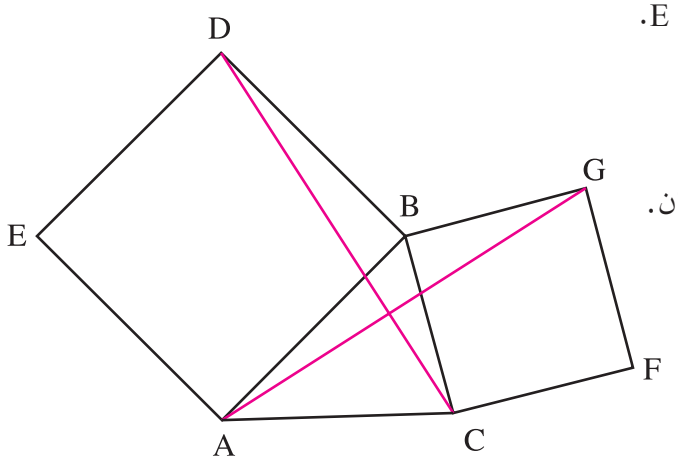
2) أ) قارن المثلثين ADC و BCD.

ب) استنتج أنّ AC= BD

3) المستقيمان(AD) و (BC) يتقاطعان في E.

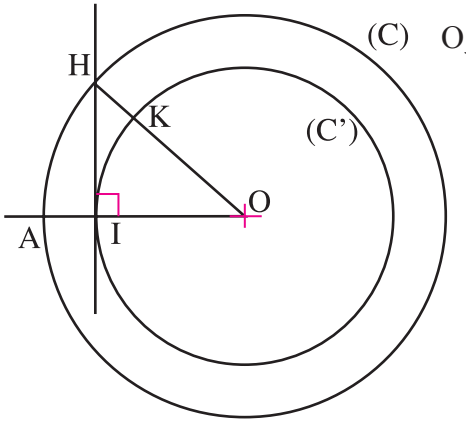
أ) ما هي طبيعة المثلث EAB ؟

12 تأمّل الرسم حيث ABDE و BCFG مربّعان.



بيّن أنّ AG=DC

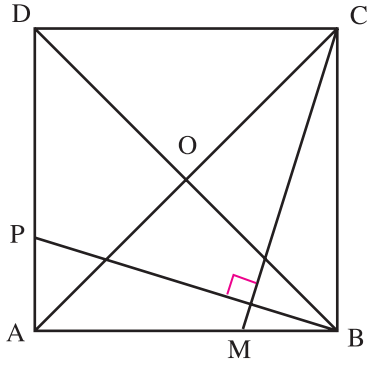
13 تأمّل الشكل المقابل حيث (C) و (C') دائرتان لهما نفس المركز O



1. بيّن أنّ المثلثين HIO و AKO متقايسان

2. ماذا يمثّل المستقيم (AK) بالنسبة إلى الدائرة (C') ؟

14 تأمّل الرسم المقابل حيث ABCD مربّع مركزه O.



1. أ) بيّن أنّ $\widehat{BCM} = \widehat{ABP}$.

ب) استنتج أنّ المثلثين MCB و ABP متقايسان.

2. أ) بيّن أنّ المثلثين OMB و OPA متقايسان.

ب) استنتج أنّ المثلث POM قائم ومتقايس الضلعين

15 أرسم مثلثا EFG قائم الزاوية في E و النقطة I منتصف [EF]. المستقيم العمودي على (EF) والمار من F يقطع (IG) في H.

2) قارن المثلثين EIG و FIH.

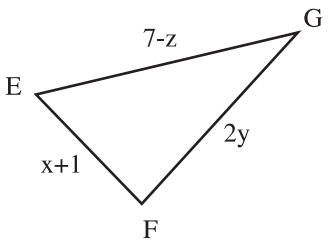
3) استنتج أنّ IH=IG.

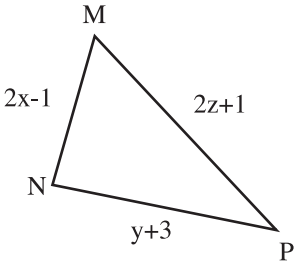
4) أ) قارن المثلثين FIG و EIH.

ب) استنتج أنّ EH=FG

16 لاحظ الشكل المقابل حيث المثلثان EFG و MNP متقايسان.

جد الأعداد x و y و z.

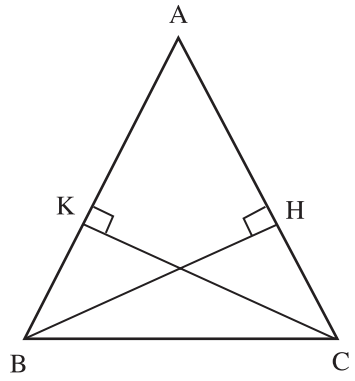




17 لاحظ الرسم المقابل حيث AB=AC

1) قارن المثلثين ABH و ACK

2) استنتج أنّ BH=CK و BK=CH



18 **1)** أرسم مثلثا MNP متقايس الضلعين قمته الرئيسية M و منصف الزاوية $\widehat{MNP}$ الذي يقطع (MP) في A ومنصف الزاوية $\widehat{MPN}$ الذي يقطع (MN) في B.

2) قارن المثلثين NPA و NPB واستنتج أنّ MA=MB

3) المستقيمان (NA) و (PB) يتقاطعان في I. قارن المثلثين MIA و MIB

4) استنتج أنّ [IM) هو منصف الزاوية $\widehat{AIB}$.

19 أرسم متوازي الأضلاع ABCD مركزه O.

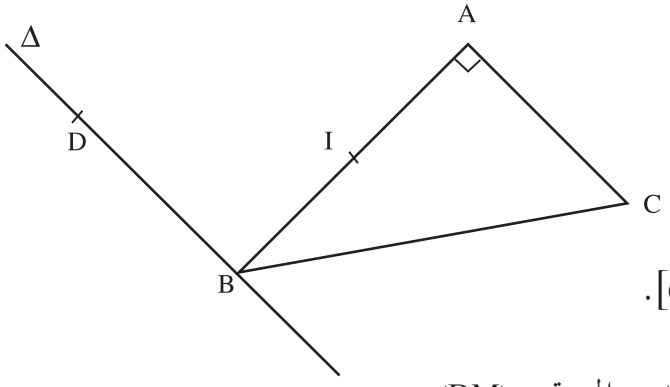
لتكن النقطة E المسقط العمودي لـ D على (AC) والنقطة F المسقط العمودي لـ B على (AC) .

1) بيّن أنّ المثلثين ADE و CBF متقايسان.

2) استنتج أنّ النقطة O منتصف [EF]

20 1) لاحظ الشكل المقابل حيث (AC) موازي لـ Δ و BD=AC

و $\widehat{BAC} = 90°$



2) بيّن أنّ AD=BC.

3) لتكن I منتصف [AB].

أ) قارن المثلثين ACI و BDI .

ب) استنتج أنّ I هي منتصف [CD].

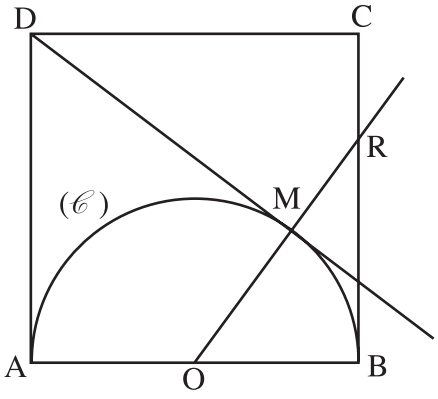
21 تأمّل الرسم المقابل حيث ABCD مربّع و المستقيم (DM) مماس للدائرة (𝒞) التي قطرها [AB].

R هي نقطة تقاطع المستقيمين (OM) و (BC)

1)أ) بيّن أنّ المثلثين OAD و OMD متقايسان

ب) استنتج أنّ DM=DC

2) بيّن أنّ المثلث CMR متقايس الضلعين.



22 1) لاحظ الرسم المقابل حيث LOT مثلث و LO=LT و LM=LN.

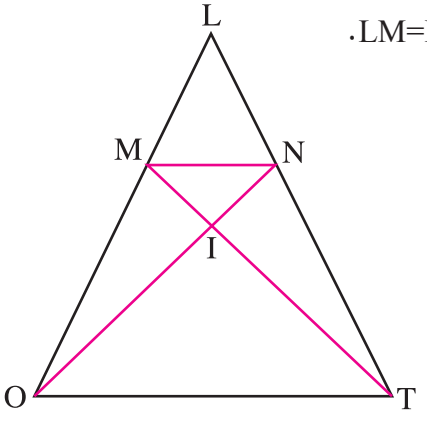
2) قارن المثلثين LON و LTM. استنتج أنّ $\widehat{LMT} = \widehat{LNO}$

3) النقطة I هي نقطة تقاطع المستقيمين(ON) و(TM).

أ) بيّن أنّ MO=TN و $\widehat{IMO} = \widehat{INT}$.

ب) قارن المثلثين IOM و ITN . استنتج أنّ IM=IN.

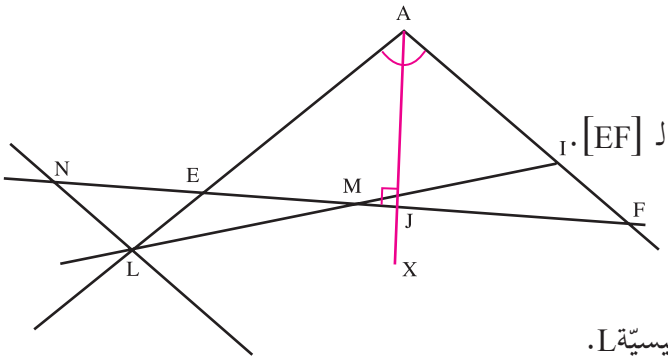
ج) استنتج أنّ (IL) منصف الزاوية $\widehat{MIN}$.



23 لاحظ الشكل المقابل حيث M منتصف [LI] و [Ax) منصف الزاوية $\widehat{LAI}$.

المستقيم المارّ من M و العمودي على [Ax) يقطع (AL) في E

و (AI) في F و (Ax) في J.



1) أ) بيّن أن المثلّث AEF متقايس الضلعين

ب) استنتج أنّ (Ax) هو الموسّط العمودي لـ [EF].

2) المستقيم المار من L والموازي لـ (AI)

يقطع (EF) في N.

أ) بيّن أنّ LEN متقايس الضلعين قمّته الرّئيسيّة L.

ب) قارن المثلّثين LNM و MIF ثم استنتج أنّ LE=IF.

24 1) أ) أرسم مثلّثا ABC قائم الزاوية و متقايس الضلعين قمّته الرّئيسيّة A ثمّ أرسم [AH] ارتفاعه المنحدر من A.

ب) أرسم خارج المثلّث ABC مستقيما (XY) يمرّ من A و لا يوازي (BC).

2) المستقيم المارّ من B و العمودي على (XY) يقطع (XY) في M والمستقيم المارّ من C والعمودي على (XY) يقطع (XY) في N.

أ) بيّن أنّ HA=HB=HC.

ب) قارن المثلّثين ACN و AMB.

ج) استنتج أنّ MN=BM+CN.

3) أ) قارن المثلّثين BMH و ANH. ماذا تستنتج بالنسبة إلى بقيّة العناصر النّظيرة؟

ب) بيّن أنّ المثلّث MHN قائم الزاوية ومتقايس الضلعين.

25 أ) أرسم زاوية قائمة $\widehat{xOy}$.

ب) عيّن على [Ox) نقطتين A و B وعلى [Oy) نقطتين C و D بحيث OA=OC و OB=OD.

ج) بيّن أنّ BC=AD.

2) المستقيمان (BC) و (AD) يتقاطعان في M.

أ) قارن المثلّثين BMA و DMC.

ب) استنتج أنّ MA=MC

3) استنتج أنّ (OM) منصف الزاوية $\widehat{AOC}$.

14 رباعيات الأضلاع

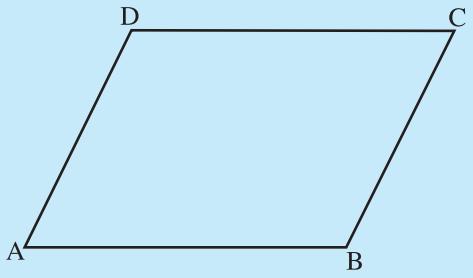
I متوازي الأضلاع

II متوازيات الأضلاع الخاصّة:

رباعيات الأضلاع

أستحضـر :

متوازي الأضلاع هو رباعي يتوازى فيه كلّ ضلعين متقابلين



1 ابن متوازي الأضلاع LCVR حيث :

$LC=5cm$ و $LR=3cm$ و $\widehat{CLR}=130°$

2 أ) أرسم مثلثا EFG غير قائم و $[EH]$ الارتفاع الصادر من E.

ب) ابن المستقيم Δ المار من G والموازي لـ (EF). Δ يقطع (EH) في A .

ج) ابن المستقيم Δ' المار من F و العمودي على (FG) يقطع Δ في B.

د) ما هي طبيعة الرباعي EFBA ؟

3 أنقل الجدول التالي على كراسك ثمّ ضع (×) في الخانة المناسبة:

	القطران يتقاطعان في المنتصف	القطران متقايسان	القطران متعامدان
في المربّع			
في المستطيل			
في المعيّن			
في متوازي الأضلاع			

4 أ) ارسم متوازي الأضلاع ABCD وعيّن النقطة I منتصف قطعة المستقيم $[AC]$.

ب) ما هي مناظرة النقطة A بالنسبة إلى I ؟

استنتج مناظر المستقيم (AB).

في متوازي الأضلاع
القطران
يتقاطعان في منتصفهما

ج) ما هي مناظرة النقطة C بالنسبة إلى I ؟ استنتج مناظر المستقيم (BC)

د) استنتج مناظرة النقطة B بالنسبة إلى I.

في متوازي الأضلاع كلّ ضلعين متقابلين متقايسان

هـ) بيّن أنّ AB=CD و AD=BC

و) بيّن أنّ النقطة I هي مركز تناظر متوازي الأضلاع ABCD ؟

في متوازي الأضلاع

- **كلّ زاويتين متتاليّتين متكاملتان.**
- **كلّ زاويتين متقابلتين متقايستان.**

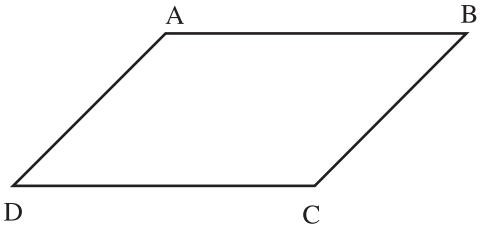
5 1) تأمل الرسم أسفله حيث ABCD متوازي الأضلاع

أ) قارن المثلثين ABD و CDB.

ب) ماذا يمكن أن تستنتج بالنسبة لأضلاع ABCD ؟

2) أ) بيّن أنّ الزاويتين $\widehat{A}$ و $\widehat{D}$ متكاملتان و $\widehat{D}$ و $\widehat{C}$ متكاملتان

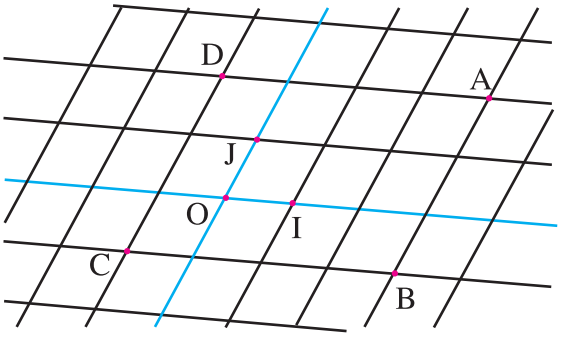
ب) قارن $\widehat{A}$ و $\widehat{C}$ ثمّ قارن $\widehat{B}$ و $\widehat{D}$.



6 تأمل الرسم المقابل حيث (O,I,J) معين في المستوي.

أ) حدّد احداثيات النقاط A و B و C و D .

ب) بيّن أنّ الرباعي ABCD متوازي الأضلاع .



7 أ) ابن مستطيلا طول أحد أضلاعه 5cm ومساحته $35cm^2$.

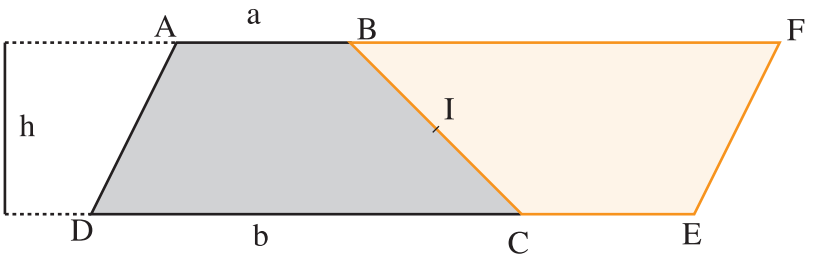
ب) ابن مستطيلا طول أحد أضلاعه 8,5cm ومحيطه 28cm.

8 في الرّسم أسفله ABCD شبه منحرف و I منتصف [BC] وECBF مناظر ABCD بالنّسبة إلى النّقطة I .

أ) بيّن أنّ النّقاط D و C و E على استقامة واحدة وكذلك النّقاط A و B و F .

ب) بيّن أنّ الرباعي AFED متوازي الأضلاع ثمّ احسب مساحته بدلالة a و b و h.

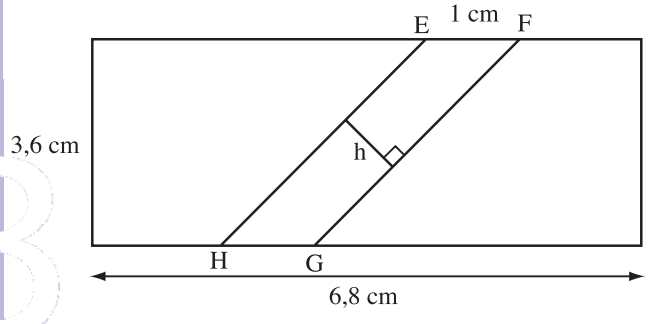
ج) استنتج مساحة شبه المنحرف ABCD بدلالة a و b و h.



9 يمثّل الرّسم المقابل تصميما لقطعة أرض مستطيلة الشّكل تشقّها طريق حافتاها متوازيتان أنجز الرسم وفق السّلم $\frac{1}{1000}$.

1) احسب الأبعاد الحقيقية لقطعة الأرض.

2) احسب مساحة الطريق ثمّ استنتج طولها.

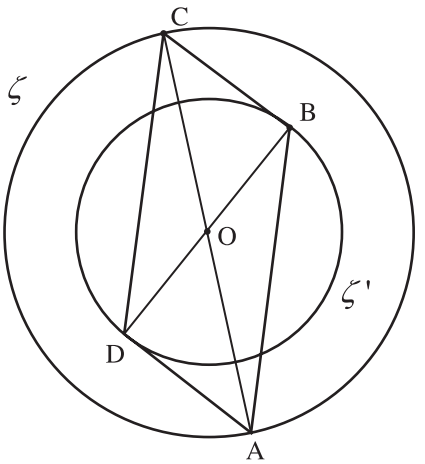


استكشف و أطبق :

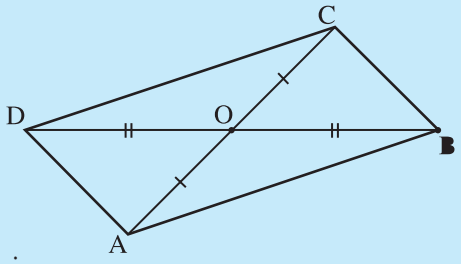
I متوازي الأضلاع

نشاط 1 تأمّل الرسم المقابل حيث O مركز كلّ من الدائرتين ك و ك'.

ما هي طبيعة الرباعي ABCD ؟ علّل جوابك.

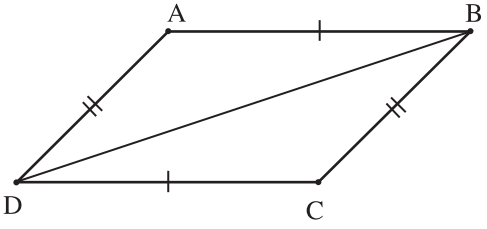


رباعي محدّب قطراه يتقاطعان في منتصفهما هو متوازي أضلاع



نشاط 2 يمثّل الرسم المقابل رباعي محدّب ABCD

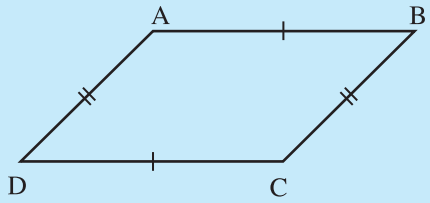
حيث AB=CD و AD=BC.



أ) بيّن أنّ المثلثين ABD و CDB متقايسان.

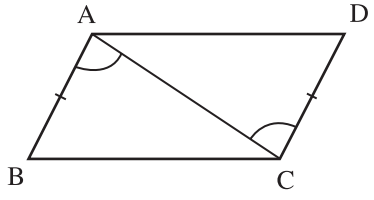
ب) قارن $\widehat{ABD}$ و $\widehat{BDC}$ ثمّ $\widehat{ADB}$ و $\widehat{DBC}$.

ج) ما هي طبيعة الرباعي ABCD ؟

رباعي محدّب يتقايس فيه كلّ ضلعين متقابلين هو متوازي الأضلاع.	

أطبق :

1 لاحظ الرسم المقابل حيث (AB)//(CD) و AB=CD.



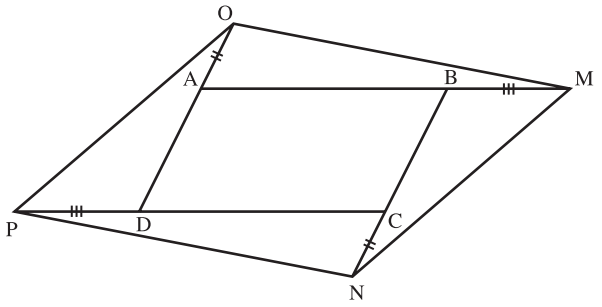
ما هي طبيعة الرّباعي ABCD ؟

2 لاحظ الرسم المقابل حيث ABCD متوازي الأضلاع و BM=DP و CN=AQ .

أ) قارن المثلثين AMQ و CPN ثمّ DPQ و BMN.

ب) استنتج طبيعة الرّباعي MNPQ ثمّ طبيعة الرباعي MAPC.

ج) استنتج أنّ المستقيمات (AC) و (MP) و (NQ) تتقاطع في نقطة.



تمرين مرفق بحل:

أ الأضلاع EFGH مركزه O

ب) المستقيم المارّ من F و الموازي لـ (EG)يقطع (EH) في A و (GH) في B.

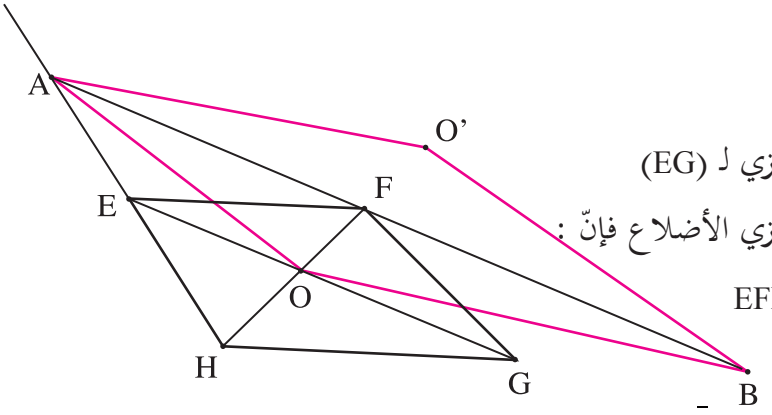
ج) بيّن أنّ F منتصف [AB]

د) بيّن أنّ الرّباعيين AFGE و EFBG متوازيا الأضلاع.

هـ) أرسم النقطة O' مناظرة O بالنسبة إلى F. بيّن أنّ OA=O'B

الحلّ :

أ) و ب) إنجاز الرسم



ج) في الرّباعي EFBG لدينا (BF) موازي لـ (EG)

حسب المعطيات.و بما أنّ EFGH متوازي الأضلاع فإنّ :

(EF) موازي لـ (GB) إذن الرباعي EFBG متوازي الأضلاع.

في الرباعي AFGE لدينا (AF) موازي لـ (EG)

حسب المعطيات و بما أنّ EFGH متوازي الأضلاع فإنّ : (GF) موازي لـ (EH) أي (GF) موازي لـ (EA)

إذن الرّباعي AFGE متوازي الأضلاع

EFBG متوازي الأضلاع إذن FB=EG

AFGE متوازي الأضلاع إذن AF=EG

إذن AF= FB

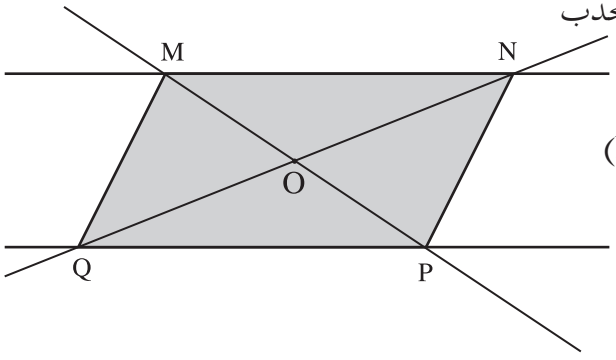
لدينا A و F و B على استقامة واحدة و FB=AF إذن النقطة F منتصف [AB].

د) لدينا F منتصف [AB] و 'O مناظرة O بالنسبة إلى F أي أنّ F منتصف ['OO]

إذن الرباعي المحدّب AO'BO قطراه يتقاطعان في منتصفهما وبالتّالي هو متوازي الأضلاع

ومنه نستنتج أنّ OA=O'B.

نشاط 3 لاحظ الرسم المقابل حيث MNPQ رباعي محدّب



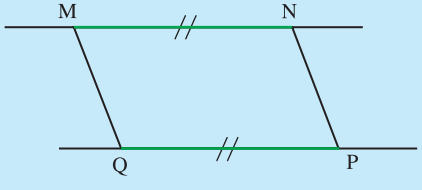
و MN=PQ و (MN) موازي لـ (PQ)

و O نقطة تقاطع المستقيمين (MP) و (NQ)

أ) قارن المثلثين MNO و PQO.

ب) استنتج أنّ النقطة O منتصف القطعتين [MP] و [NQ]

ج) ما هي إذن طبيعة الرباعي MNPQ ؟

رباعي محدّب له ضلعان متوازيان ومتقايسان هو متوازي الأضلاع.	

أطبق :

1 أ) ارسم متوازي الأضلاع LION حيث OI=4cm و LI=7cm وعيّن النقطتين M من [LI] و P من [ON] حيث LM=OP=3cm .

ب) ما هي طبيعة الرباعي LMOP ؟

ج) عيّن نقطة Q من [IO] حيث IQ=1cm ثمّ أرسم النقطة E بحيث يكون الرباعي IQLE متوازي الأضلاع.

2 أ) ارسم مثلثا ABC حيث AB=6cm و AC=4cm و BC=3cm

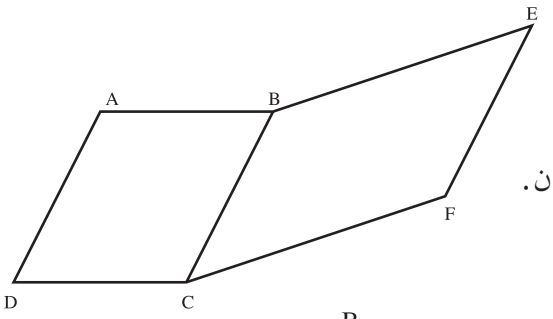
ثمّ عيّن النقطتين I و O منتصفي [AB] و [AC] على التوالي.

ب) ابن النقطة N مناظرة النقطة I بالنسبة إلى O.

ج) بيّن أنّ الرباعي ANCI متوازي الأضلاع.

د) استنتج طبيعة الرباعي BINC ثمّ حدّد OI.

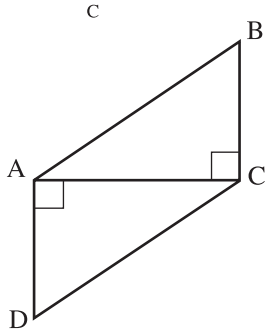
3 لاحظ الرسم المقابل حيث ABCD و BEFC متوازيا الأضلاع. بيّن أنّ (DF) و (AE) متوازيان.



4 وحدة قيس الطول هي الصنتمتر.

في الرسم المقابل لدينا AD=3.2 والمثلّثان ABC وADC لهما نفس المساحة وقيسها 4 cm².

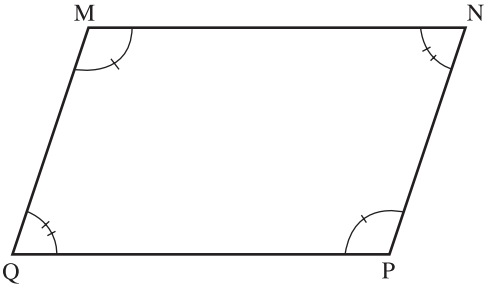
حدّد BC ثمّ استنتج أنّ (AB)//(CD) و AB=CD .



نشاط 4 لاحظ الرسم المقابل حيث MNPQ رباعي محدّب

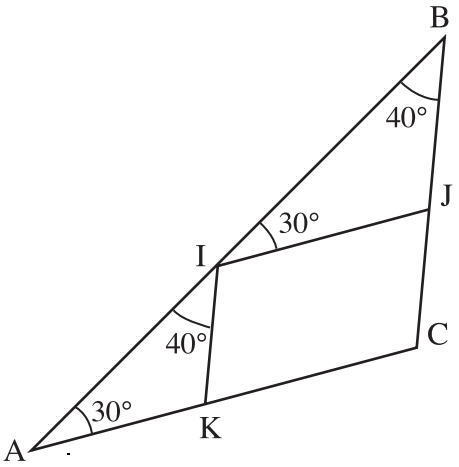
و $\widehat{M}=\widehat{P}$ و $\widehat{N}=\widehat{Q}$

1. احسب $2\widehat{M}+2\widehat{Q}$ و $2\widehat{M}+2\widehat{N}$.
2. استنتج أنّ الزاويتين $\widehat{M}$ و $\widehat{Q}$ متكاملتان وكذلك هما الزاويتان $\widehat{M}$ و $\widehat{N}$
3. استنتج طبيعة الرباعي MNPQ .



رباعي محدّب زواياه المتقابلة متقايسة هو متوازي الأضلاع

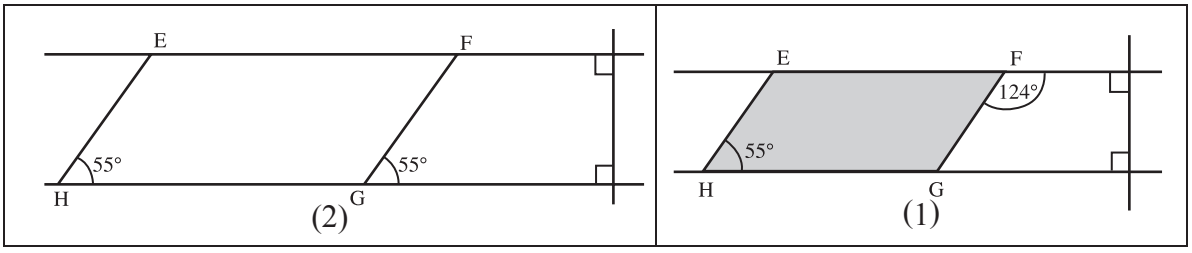
أطبق :



1 أ) لاحظ الرسم المقابل ثمّ احسب أقيسة زوايا الرباعي IJCK.

ب) ما هي طبيعة الرباعي IJCK ؟

2 لاحظ الرسمين التّاليين وحدّد في أيّ حالة من الحالتين (1) و (2) الرّباعي EFGH هو متوازي الأضلاع.



II متوازيات الأضلاع الخاصّة:

المستطيل :

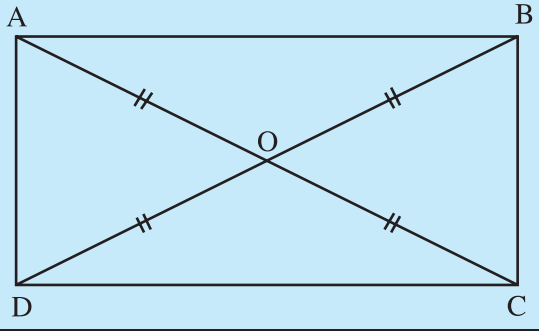
نشاط 1 أ) ارسم قطعتي مستقيم [GH] و [KL] متقايستين ومتقاطعتين في منتصفيهما O.

ب) بيّن أنّ الرباعي GKHL متوازي الأضلاع.

ج) بيّن أنّ كلاّ من المثلثين OGK و OKH متقايس الضلعين.

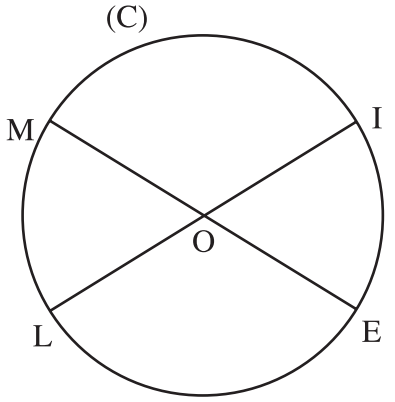
د) احسب $\widehat{GKO}+\widehat{OKH}$ استنتج إذن طبيعة الرباعي GKHL.

رباعي محدّب قطراه متقايسان ويتقاطعان في منتصفهما هو مستطيل



أطبق :

1 لاحظ الرسم المقابل ثمّ بيّن أنّ الرباعي MIEL مستطيل.



2 1.نريد بناء مستطيل IJKL حيث IJ=6cm و $\widehat{IJL} = 35°$

أ) ارسم مثلثا IJL وفق المعطيات السّابقة.

ب) أكمل بناء النقطة K.

2. ابن مستطيلا MNOP حيث MP=4.5cm و $\widehat{NMO} = 30°$

3. ابن مستطيلا ROSE حيث RS=6cm و $\widehat{ORS}=30°$

تمرين مرفق بحل :

1 أ) ارسم مثلّثا ABC قائم في A.عيّن النقطتين I منتصف الوتر [BC] و D مناظرة النقطة A بالنسبة لـ I.

ب) ما هي طبيعة الرباعي ABDC . بيّن أن النقطة I هي مركز الدائرة المحيطة بالمثلّث ABC.

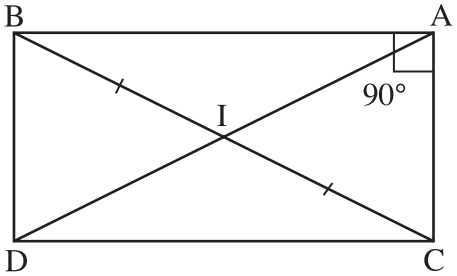
2 نريد أن نبين ما يلي :

اذا كان منتصف أحد أضلاع مثلث يبعد نفس البعد عن رؤوسه الثلاثة فإن هذا المثلث قائم والضلع المذكور هو وتره.

أ) ارسم قطعة مستقيم [RS] ثمّ عيّن منتصفها النقطة I.

ب) ارسم نقطة M مخالفة لـ R و S حيث IM=IR=IS

ج) ما هي طبيعة المثلث RSM ؟ علّل جوابك.



الحلّ :

أ) الرسم

ب) في الرباعي ABDC لدينا النقطة I منتصف [BC]

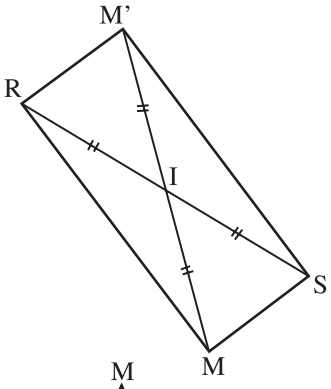
و هي كذلك منتصف [AD] لأنّ A و D متناظرتان بالنسبة إلى I.

إذن الرباعي ABDC متوازي الأضلاع

وبما أنّ له الزاوية $\widehat{BAC}$ قائمة إذن هو مستطيل.

في المستطيل ABDC القطران متقايسان ويتقاطعان في منتصفهما I.

إذن IA=IB=IC=ID و بالتّالي النقاط A و B و C و D تنتمي إلى الدائرة الّتي مركزها I وهي الدائرة المحيطة بالمثلّث ABC .



2) أ) و ب) لاحظ الرسم.

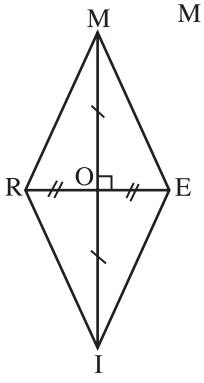
ج) لتكن M' مناظرة النقطة M بالنسبة إلى I إذن الرباعي RMSM' متوازي الأضلاع (القطران يتقاطعان في منتصفهما)

كذلك لدينا IR=IS=IM=IM' ومنه نستنتج أنّ RS=MM'

إذن الرباعي RMSM' هو مستطيل وبالتالي الزاوية $\widehat{RMS}$ قائمة والمثلث MRS قائم.

المعين

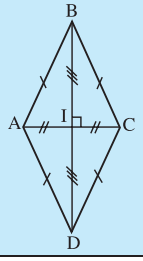
نشاط 1 لاحظ الرسم المقابل حيث [RE] و [MI] متعامدان في منتصفهما O.



أ) قارن MR و ME.

ب) قارن RM و EI.

ج) استنتج أنّ الرّباعي MEIR معيّن

رباعي محدّب قطراه متعامدان ويتقاطعان في منتصفهما هو معيّن . متوازي أضلاع قطراه متعامدان هو معيّن.	

أطبق :

1) أ) ارسم مثلثا ABC متقايس الأضلاع و النقاط I و J و K منتصفات [AB] و [BC] و [AC] على التوالي

ب) بيّن أنّ المثلثين AIK و CJK متقايسان.

ج) استنتج طبيعة الرباعي BIKJ.

2) أ) ارسم دائرة (C) مركزها O وعيّن نقطتين A و B منها.

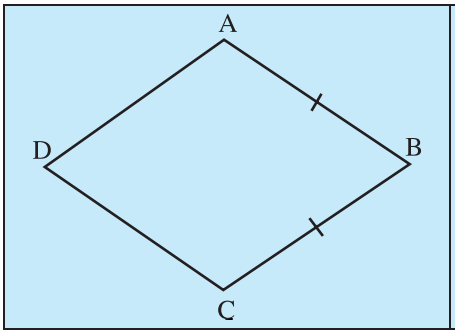
ب) عيّن النقطة O' مناظرة O بالنسبة إلى المستقيم (AB) .

ج) ما هي طبيعة الرباعي OAO'B ؟ علّل جوابك.

3) عيّن نقطتين I و A حيث IA=5cm ثمّ ابن النقاط B و C و D ليكون ABCD معيّنا مركزه I ومحيطه 28cm.

نشاط 2 أ) ارسم متوازي الأضلاع ABCD حيث AB=AD

ب) بيّن أنّ ABCD معيّن.

متوازي الأضلاع له ضلعان متتاليان متقايسان هو معيّن.	

أطبق :

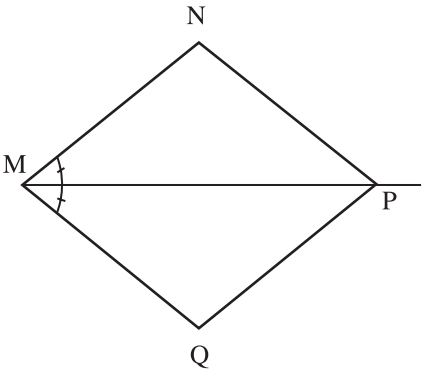
1) أ) ارسم مثلثا ABC متقايس الضلعين قمّته الرئيسية A ثمّ عيّن نقطة M على [BC].

ب) المستقيم المارّ من M و الموازي لـ (AC) يقطع (AB) في D و المستقيم المارّ من M و الموازي لـ (AB) يقطع (AC) في E.

ج) بيّن أنّ DM=DB

د) المستقيم المارّ من B و الموازي لـ (AC) يقطع (ME) في F.بيّن أنّ (DF) عمودي على (BM).

أطبق:



1 لاحظ الرسم المقابل حيث MNPQ متوازي الأضلاع و [MP] منصّف الزاوية $\widehat{QMN}$.

2 أ) قارن $\widehat{PMN}$ و $\widehat{MPN}$

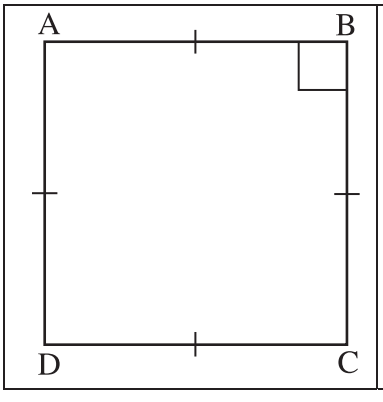
ب) ما هي طبيعة المثلث MNP ؟

ج) ما هي طبيعة متوازي الأضلاع MNPQ ؟

المربع

نشاط هل أنّ الجمل التالية صحيحة ؟ علّل جوابك.

- المربّع هو متوازي الأضلاع له ضلعان متتاليان متقايسان وزاوية قائمة.
- المربّع هو مستطيل له ضلعان متتاليان متقايسان.
- المربّع هو معيّن له زاوية قائمة.
- رباعي محدّب أضلاعه متقايسة وله زاوية قائمة هو مربّع.



رباعي محدّب أضلاعه متقايسة وله زاوية قائمة هو مربّع

أطبق :

1 أ) أرسم دائرة $(\mathcal{C})$ مركزها O.

ب) عيّن على $(\mathcal{C})$ نقطتين A و B حيث $\widehat{AOB} = 90°$

ج) المماسّان للدائرة في A و B يتقاطعان في النقطة D. ما هي طبيعة الرباعي AOBD.

2 في كلّ حالة من الحالات التّالية أرسم الرباعي المقترح حسب المعطيات ثمّ حدّد طبيعته.

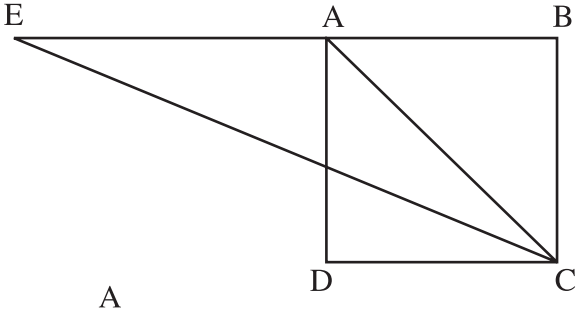
1. الرباعي PQRS حيث PR=SQ و $(SQ) \perp (PR)$ و PQ=QR و (PR) تقطع [SQ] في منتصفها.
2. الرباعي EFGH حيث [EG] و [FH] قطرا نفس الدائرة و $\widehat{GEF} = 45°$.
3. الرباعي CORD حيث المثلثان COR و RDC قائمان على التوالي في O و D و متقايسا الضلعين.

3 لاحظ الرسم المقابل حيث ABCD مربّع

و E نقطة من نصف المستقيم $[BA)$ حيث AE=AC.

أ) بيّن أنّ [CE) منصّف الزاوية $\widehat{ACD}$.

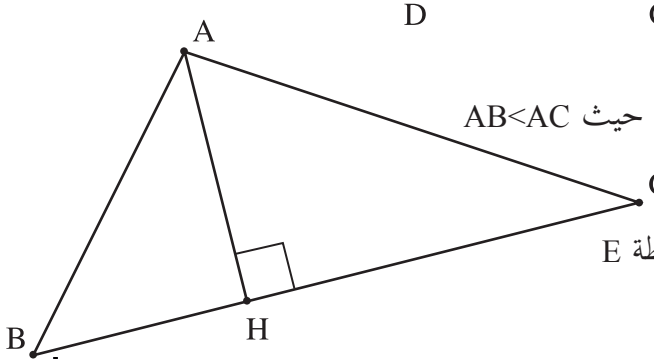
ب) أوجد أقيسة زوايا المثلث BCE.



مسائل إدماجية :

مسألة 1 يمثل الرسم المقابل مثلثا ABC قائما في A حيث AB<AC

و [AH] الارتفاع الصادر من A.



1-أ) أنقل الرسم على كراسك ثم عيّن النقطة E مناظرة B بالنسبة للنقطة H.

ب)بيّن أنّ المثلث ABE متقايس الضلعين.

2- لتكن النقطة D مناظرة A بالنسبة إلى H .ما هي طبيعة الرباعي ABDE؟

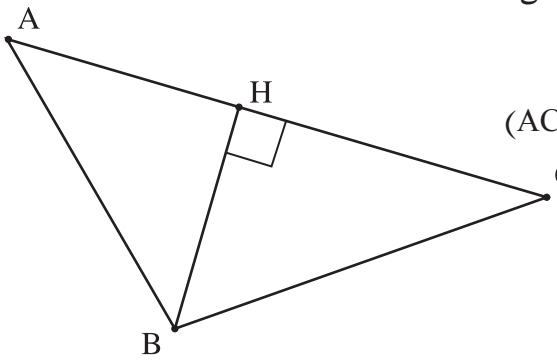
3- بيّن أنّ CA=CD

4- المستقيم (DE) يقطع (AC) في F والمستقيم المار من D والموازي للمستقيم (AC) يقطع (AB) في النقطة L و (BC) في النقطة K.

أ) ما هي طبيعة الرباعي AFDL ؟ استنتج أنّ EF=BL.

ب) بيّن أنّ المثلثين BKL و ECF متقايسان.

مسألة 2 يمثّل الرسم المقابل مثلثا ABC و [BH] الارتفاع الصادر من B .



1-أ) أنقل الرسم على كراسك

ب) أرسم المستقيم Δ المارّ من C و العمودي على (AC) و المستقيم Δ' المارّ من H و الموازي للمستقيم (BC).

لتكن E نقطة تقاطع Δ و Δ'.

2- ما هي طبيعة الرباعي BHEC ؟

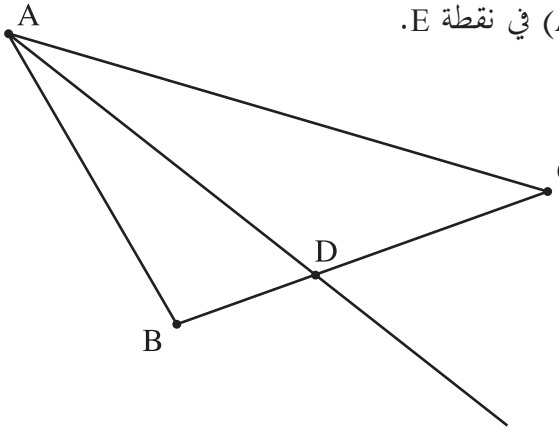
3- منصّف الزاوية $\widehat{BHE}$ يقطع (BC) في F. بيّن أن BH=BF ؟

4- لتكن G نقطة من [HE] حيث HG=BF ما هي طبيعة الرباعي BHGF ؟

5- لتكن النقطة K مناظرة E بالنسبة إلى C. بيّن أنّ HK=BC. استنتج طبيعة الرباعي BHCK.

مسألة 3 ABC مثلث غير متقايس الضلعين. منصف الزاوية $\widehat{BAC}$ يقطع (BC) في النقطة D .

المستقيم المار من B و الموازي لـ (AD) يقطع (AC) في نقطة E.



1- بيّن أنّ AE=AB.

2- لتكن النقطة F مناظرة E بالنسبة إلى A.

المستقيمان (BF) و (AD) يتقاطعان في نقطة I.

بيّن أنّ I منتصف [BF].

3- لتكن H مناظرة النقطة A بالنسبة إلى I. بيّن أنّ (AF) موازي لـ (HB).

4- بيّن أنّ الرباعي AEBH متوازي أضلاع وأنّ $AI=\frac{1}{2}EB$.

5- لتكن النقطتين M و N المسقطتين العموديين للنقطة D على (AB) و (AC) على التوالي .

نرمز ب 'A للمسقط العمودي للنقطة A على (BC).

أ) احسب بطريقتين مساحة المثلث ABD.

ب) احسب بطريقتين مساحة المثلث ACD.

ج) استنتج أنّ $\frac{DB}{DC}=\frac{AB}{AC}$.

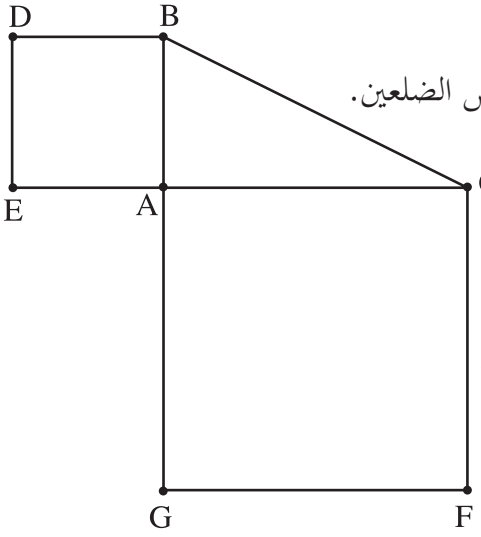
مسألة 4

يمثل الرسم المقابل مثلثا ABC قائم الزاوية في A و مربّعين ABDE و ACFG.

1-أ) أنقل الرسم على كراسك .

ب) بين أنّ النقاط A و D و F على استقامة واحدة .

2- المستقيم المارّ من A و العمودي على (BC) يقطع (BC) في H و (GE) في M .



أ) ما هي مناظرة الزاوية $\widehat{ABC}$ بالنسبة إلى (DF).

ب) بين أنّ كلاً من المثلثين AMG و AME متقايس الضلعين.

ج) استنتج أنّ M منتصف [EG].

3- المستقيمان (DE) و (FG) يتقاطعان في K.

أ) بين أنّ الرباعي AEKG مستطيل .

ب) استنتج أنّ المستقيمات (AH) و(DE) و(GF) تتقاطع في نقطة واحدة .

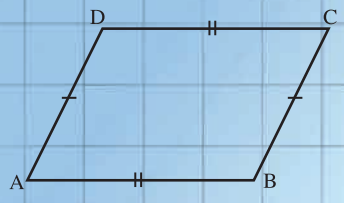
4- لتكن P المسقط العمودي لـ D على (BC) و N المسقط العمودي لـ F على (BC)

أ) قارن المثلثين ABH وBDP ثمّ المثلثين ACH وCFN.

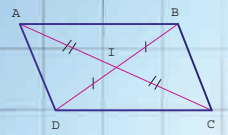
ب) بيّن أنّ BC=PD+NF .

أحوصـلـه

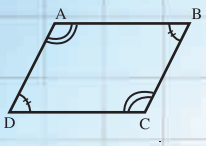
متوازي الأضلاع هو رباعي يتوازى فيه كلّ ضلعين متقابلين



- متوازي الأضلاع القطران يتقاطعان في منتصفهما.

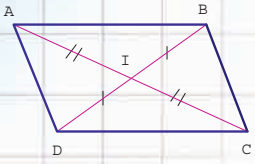


- في متوازي الأضلاع كلّ زاويتين متتاليّتين متكاملتين وكلّ زاوتين متقابلتين متقايستين.

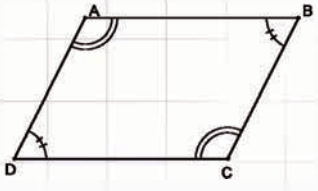


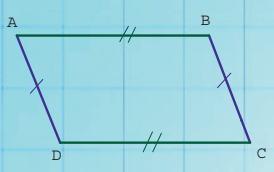
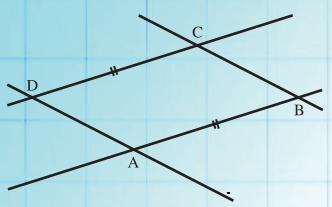
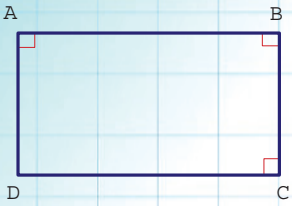
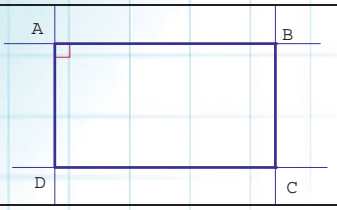
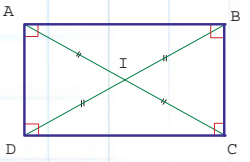
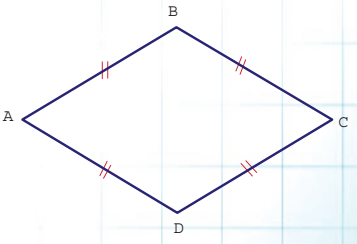
- في متوازي الأضلاع كلّ ضلعين متقابلين متقايسين.

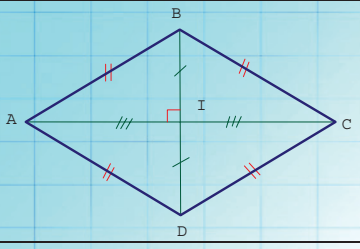
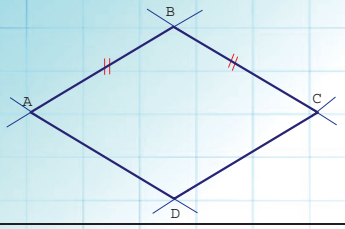
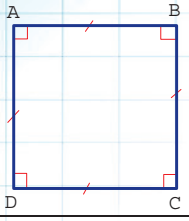
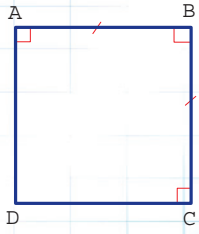
- رباعي محدّب قطراه يتقاطعان في منتصفهما هو متوازي الأضلاع



- رباعي محدّب زواياه المتقابلة متقايسة هو متوازي الأضلاع



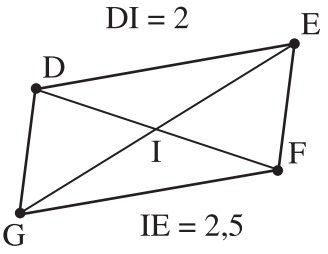
• رباعي محدّب يتقايس فيه كلّ ضلعين متقابلين هو متوازي الأضلاع	
• رباعي محدّب له ضلعان متوازيان ومتقايسان هو متوازي الأضلاع	
• المستطيل هو رباعي له أربع زوايا قائمة	
• المستطيل هو متوازي الأضلاع له زاوية قائمة	
• في مستطيل القطران متقايسان ويتقاطعان في منتصفهما. • كلّ رباعي محدّب قطراه يتقاطعان في منتصفهما ومتقايسان هو مستطيل	
• المعيّن هو رباعي أضلاعه الأربعة متقايسة.	

رباعي محدّب قطراه يتقاطعان في منتصفهما و متعامدان هو معيّن	
متوازي الأضلاع له ضلعان متتاليان و متقايسان هو معيّن	
المربّع هو رباعي أضلاعه متقايسة و زواياه قائمة	
• رباعي محدّب أضلاعه متقايسة و له زاوية قائمة هو مربّع • مستطيل له ضلعان متتاليان متقايسان هو مربّع	

تمارين

1 لاحظ الرسم المقابل حيث DEFG متوازي الأضلاع

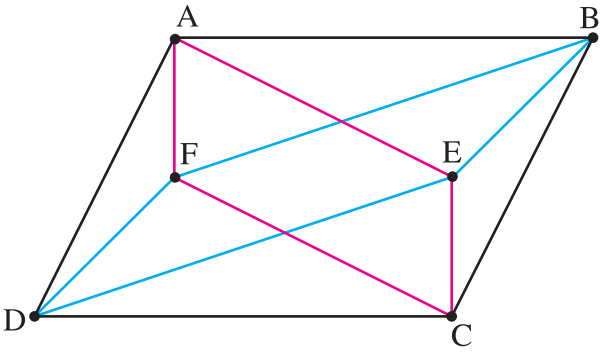
حدّد الأبعاد ID و IE و DF و GE



2 تأمّل الشكل المقابل

حيث كلّ من ABCD و AECF متوازي الأضلاع

بيّن أنّ EBFD متوازي الأضلاع.



3 أرسم متوازي الأضلاع EFGH و النقطة I منتصف [GH]

أ) أرسم النقطة M مناظرة E بالنسبة إلى I.

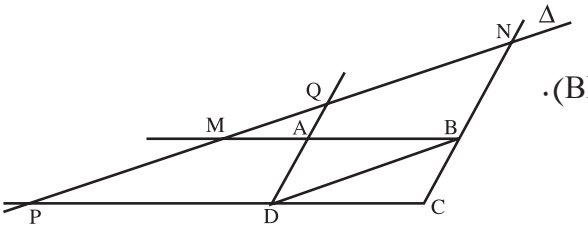
ب) ما هي طبيعة الرباعي EGMH ؟

ج) استنتج أنّ النقطة G منتصف [FM]

4 تأمّل الرّسم المقابل حيث ABCD

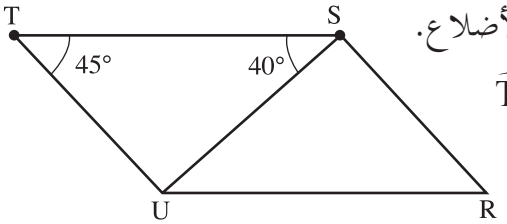
متوازي الأضلاع و المستقيم Δ موازي لـ (BD).

قارن PQ و MN .



5 لاحظ الرسم المقابل حيث TSRU متوازي الأضلاع.

حدّد أقيسة الزوايا $\widehat{SRU}$ و $\widehat{TUS}$ و $\widehat{TUR}$



6 ليكن متوازي الأضلاع EFGH مركزه O حيث $\widehat{OEF} = 25°$ و $\widehat{OFE} = 65°$ و EF=5cm

أ) أرسم المثلّث OEF ثمّ متوازي الأضلاع EFGH.

ب) أحسب $\widehat{FEH}$ ثمّ استنتج طبيعة الرباعي EFGH.

7 أ) أرسم مثلثا ABC متقايس الضلعين قمّته الرئيسية A ثمّ عيّن نقطة D من [BC].

ب) أرسم المستقيمين Δ و'Δ المارين من D و الموازيين على التوالي لـ (AC) و(AB).

Δ يقطع (AB) في النقطة E و 'Δ يقطع(AC) في F.

ج) أحسب محيط الرباعي AEDF بدلالة AB.

8 في كلّ حالة من الحالات التاليّة حدّد الأبعاد و الأقيسة المطلوبة في مستطيل RECT مركزه I.

1) RE=7cm و EC=5cm أحسب RT و TC

2) $IE = 2,2cm$ و $\widehat{IER} = 20°$ أحسب IR و ET و $\widehat{ICT}$ و $\widehat{IEC}$ و $\widehat{IRE}$ و IT

3) RC=8cm و $\widehat{RIT} = 40°$ أحسب IE و IC و IR و $\widehat{IRE}$ و $\widehat{IRT}$ و $\widehat{TIC}$

9 ليكن ABCD مستطيلا حيث $AB = 4cm$ و $AD = 3cm$

أ) أرسم الشكل ثمّ عيّن نقطة E على [AB] حيث DE=6cm وعيّن النقطة F بحيث الرّباعي CDEF متوازي أضلاع.

ب) احسب مساحة متوازي الأضلاع CDEF .

ج) المستقيم المارّ من D و العمودي على (CF) يقطعه في النقطة H.أحسب DH.

10 أرسم معيّنا ABCD مركزه O حيث $AC = 2,4cm$ و $BD = 6,6cm$.

عيّن النقطتين I و J على التوالي منتصفي [OA] و [OC]

احسب مساحتي ABCD و IBJD . ماذا تلاحظ ؟

11 أ) أرسم متوازي الأضلاع IJKL و النقطة O منتصف [IK].

ب) أرسم المستقيمين Δ_1 و Δ_2 العموديين على (IK) و المارّين على التّوالي من J و L .

Δ_1 يقطع (KL) في A و Δ_2 يقطع (IJ) في B.

ج) بيّن أنّ النقطة O منتصف [AB].

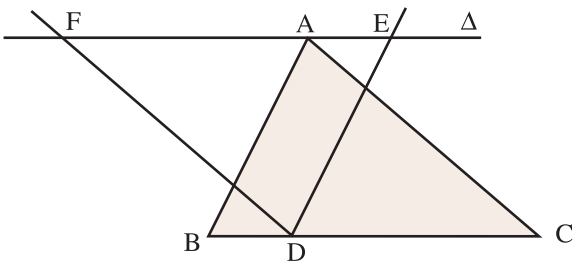
د) استنتج طبيعة الرباعي IBKA.

12 ليكن ABCD مربّعا حيث $AB = a$ و $AC = d$.

أ) بيّن أنّ $2a^2 = d^2$.(احسب مساحة المربّع ABCD بطريقتين).

ب) استنتج مساحته إذا علمت أنّ AC=10cm.

13 لاحظ الرّسم المقابل حيث :



- المستقيم Δ موازي لـ (BC).
- المستقيم (DE) موازي لـ (AB).
- المستقيم (DF) موازي لـ (AC).

بيّن أنّ CE=BF.

14 أ) أرسم متوازي الأضلاع ABCD مركزه O

ب) عيّن نقطة M من [AB] ونقطة N من [CD] بحيث AM=CN

ج) بيّن أنّ النقطة O منتصف [MN].

15 أ) أرسم متوازي الأضلاع ABCD.

ب) عيّن النقاط M و N و E و F بحيث :

M و N على التوالي منتصفي [AB] و [DC].

النقطة E مناظرة N بالنسبة إلى M.

النقطة F مناظرة M بالنسبة إلىN.

ج) بيّن أنّ المستقيمين (MC) و (AN) متوازيان.

د) استنتج طبيعة الرباعي BEDF.

16 أ) أرسم متوازي الأضلاع ABCD حيث AB>AD . منصفا الزاويتين $\widehat{BAD}$ و $\widehat{ADC}$ يتقاطعان في I ومنصفا الزاويتين $\widehat{BCD}$ و $\widehat{ABC}$ يتقاطعان في J.

ب) قارن المثلثين AID و BJC و استنتج أنّ ID=JB.

ج) بيّن أنّ IC=JA .

د) استنتج طبيعة الرباعي AICJ.

17 أرسم مثلثا ABC. منصف الزاوية $\widehat{BAC}$ يقطع المستقيم (BC) في النقطة D.

أرسم المستقيم Δ المار من D و الموازي لـ (AB) . Δ يقطع (AC) في E.

قارن EA و ED .

لتكن F النقطة من [AB] حيث BF=AE.قارن BD و EF.

18 ابن مستطيلا EFGH مركزه I في كلّ حالة من الحالات التالية :

أ) EH=5cm و EG=8cm، ب) EF=10cm و $\widehat{HFG}=55°$ ج) $\widehat{EIF}=110°$ و EG=8cm

د) $\widehat{EGH}=35°$ و EF=6cm هـ) HG=9cm و $\widehat{EIF}=126°$ و) EF=8cm و IH=5cm

ز) $EF=\frac{2}{3}EG$

19 أرسم مستقيما(xy) وعيّن نقطة O منه.

أ) أرسم نصف المستقيم [Oz) غير عمودي على (xy)

ب) ابن [Ou) و [Ov) منصّفا الزاويتين $\widehat{xOz}$ و $\widehat{yOz}$ على التوالي.

ثمّ عيّن نقطة A على [Ou)ونقطة B من [Ov) .

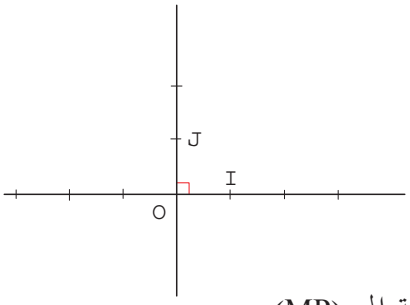
ج) ابن النقطة C بحيث AOBC متوازي الأضلاع.

د) أحسب $\widehat{uOv}$ و استنتج طبيعة الرباعي AOBC.

20 أنقل المعيّن المقابل على كراسك حيث OI=OJ=1cm

عيّن النقاط A(-3,0) و B(0,-1) و R(1,3) ثمّ ابن النقاط U و S و T بحيث

- RSTU مستطيلا
- (AB) محور تناظر له.
- ومركزه نقطة ترتيبتها 2-.



21 أ) أرسم مستطيلا MNPQ مركزه O

ب) ابن النقطتين E و F مناظرتي N و Q على التوالي بالنسبة إلى (MP).

ج) ما هو مناظر المستقيم (NQ) بالنسبة إلى (MP) ؟

د) استنتج أنّ الرباعي ENFQ مستطيل.

22 ابن المعيّن ABCD في كلّ حالة من الحالات التّالية :

أ) AC=8.2cm و AB=5.4cm

ب) AC=9.4cm و محيطه يساوي 24.8cm

ج) AB=6.4cm و $\widehat{BCD} = 48°$

23 1) ارسم دائرتين C و C' لهما نفس المركز A و شعاعهما علي التّوالي 6cm و 8cm.

2) ارسم قطرا [EF] من C و قطرا [GH] من C' بحيث $(GH) \perp (EF)$.

ما هي طبيعة الرباعي EGFH ؟ ما هي مساحته ؟

24 أ) أرسم قطعة مستقيم [AB] حيث AB=4cm

ب) أرسم الدائرتين $\mathcal{C}$ و $\mathcal{C}'$ مركزيهما على التوالي A و B و لهما نفس الشعاع 3cm.

ج) $\mathcal{C}$ و $\mathcal{C}'$ يتقاطعان في النقطتين C و D . ما هي طبيعة الرباعي ACBD؟

25 1) أ) أرسم مستقيما Δ ونقطتين M و N ليستا من نفس الجهة بالنسبة لـ Δ

ب) ابن نقطتين A و B بحيث يكون MANB معيّنا و $A \in \Delta$.

ج) ما هما موقعي النقطتين M و N اللّذان لا تمكّنان من بناء النقطتين A و B ؟

2) اجب عن نفس الأسئلة بتعويض معيّن بمستطيل.

26 1) أرسم مستطيلا ABCD .

2) ابن النقاط A' و B' و C' و D' حيث :

A' مناظرة النقطة A بالنسبة إلى D

B' مناظرة النقطة B بالنسبة إلى A

C' مناظرة النقطة C بالنسبة إلى B

D' مناظرة النقطة D بالنسبة إلى C

3) بيّن أنّ الرباعي A'B'C'D' متوازي الأضلاع.

4) بيّن أنّ مساحة الرباعي A'B'C'D' هي خمس مرّات مساحة المستطيل ABCD

27 1) ارسم مثلّثا ABC محيطه يساوي 21cm و AB=AC و $\widehat{BAC} = 60°$.

2) أ) نعتبر D و E مناظرتي النقطتين B و C على التوالي بالنسبة للنقطة A و F مناظرة النقطة A بالنسبة للمستقيم (BC).

حدّد طبيعة الرباعيين ABFC و BCDE .

ب) أحسب قيس كلّ زاوية من زوايا الشّكل المتحصّل عليه.

28 أرسم دائرة مركزها I وقطرين منها [AB] و[CD] متعامدان.

ما هي طبيعة الرباعي ACBD ؟

29 1) ارسم مستقيما D ثم عيّن نقطتين A و I بحيث $A \notin D$ و $I \in D$

2) ابن مربعا مركزه I بحيث يكون D محور تناظر له و A نقطة من أحد أضلاعه.

30 أ) عيّن نقطتين A و I ثمّ ابن (بالمسطرة والبركار) النقاط B و C و D بحيث يكون ABCD مربّعا مركزه I

ب) عيّن نقطة O ثمّ ابن مربّعا RSTU مركزه O وطول ضلعه 6cm.

15

الهرم والمخروط والكرة

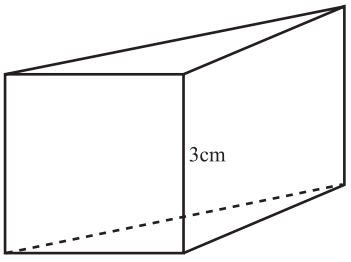
I الهرم

II المخروط

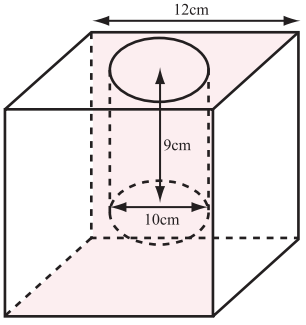
III الكرة

الهرم والمخروط والكرة

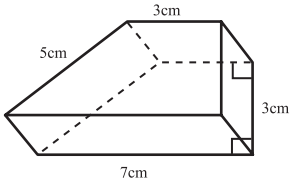
أستحضـــر :



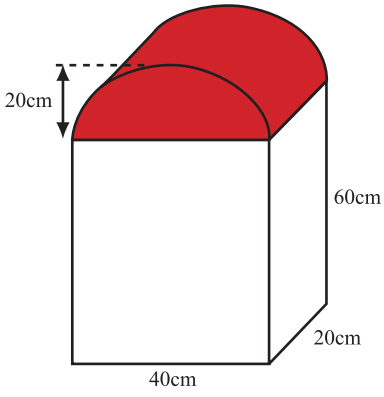
1 .يمثل الشكل المقابل موشورا قائما أوجهه الجانبية مربعات.
أحسب مساحته الجانبية



2 حاوية أقلام بلورية شكلها الخارجي مكعب وشكلها الداخلي إسطوانة دائرية قائمة كما يبينه الرسم المقابل
ما هي كتلتها علما أنّ كتلة $1m^3$ من البلور هي 2530kg



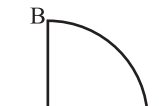
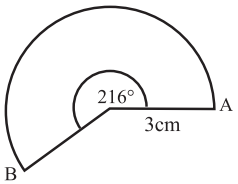
3 يمثل الرسم المقابل موشورا قائما قاعدتاه في شكل شبه منحرف.
أحسب ارتفاعه إذا علمت أن مساحته الجملية تساوي $66cm^2$.



4 يمثل الرسم المقابل علامة كيلومترية.
ما هي تكلفة تلوين العلامات الكيلومترية على طريق تربط بين مدينتين تفصلهما 125km
إذا علمت أن كلفة تلوين المتر المربع الواحد هي 11,400 دينارا ؟.

5 وحدة قيس الطول الصنتمتر.

انقل وأتمم الجدول التالي :

الشكل				قطاع دائري شعاعه 3cm و $\widehat{AOB}=1°$	قطاع دائري شعاعه R و $\widehat{AOB}=\alpha°$
طول القوس $\overset{\frown}{AB}$					
مساحة القطاع الدائري $\overset{\frown}{AOB}$					

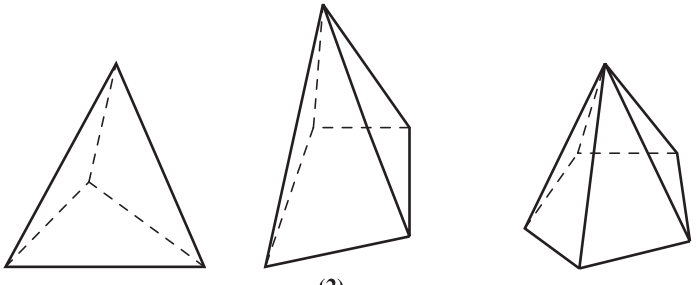
استكشـــف واطبق :

I الهرم

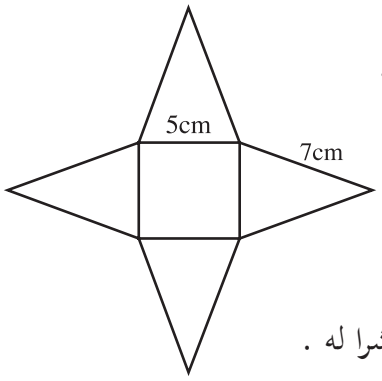
نشاط 1 ما هو بالنسبة لكلّ مجسم من المجسمات (1) و (2) و(3):

أ) شكل قاعدته ؟

ب) شكل أوجهه الجانبية ؟



(1) (2) (3)



نشاط 2 يمثل الرسم المقابل مربعا محاطا بأربعة مثلثات متقايسة الضلعين.

ارسمه على ورق مقوى وفق أبعاده الحقيقية .

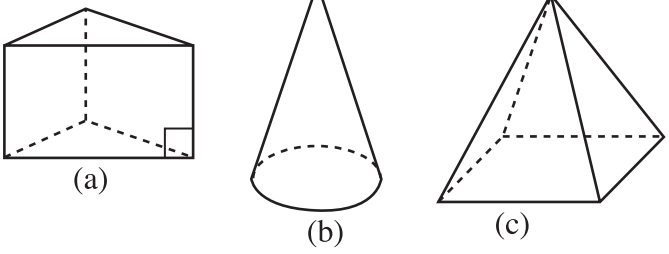
أ) قم بطي المثلثات على التوالي وفق أضلاع المربع للحصول على مجسم.

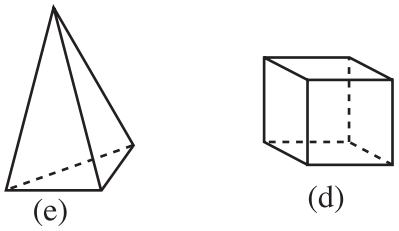
يسمّى المجسم المتحصل عليه **هرم** ويسمى الشكل المقابل نشرا له .

الهرم هو مجسم قاعدته مضلع وأوجهه مثلثات

أطبق:

1 أي مجسّم من المجسّمات التالية يمثل هرما ؟.



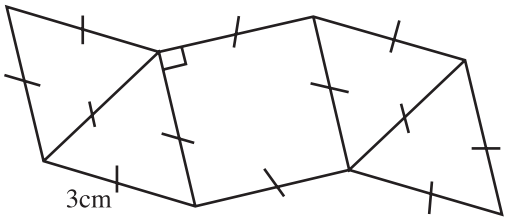


2 أنقل الجدول التالي وأكمله :

	هرم أول	هرم ثاني
عدد أوجهه الجانبية	.....	7
عدد أحرفه	24	.....
عدد قممه	.....	.....

3 الرسم المقابل يمثل نشرا لهرم.

انقله على ورق شفاف واصنعه.



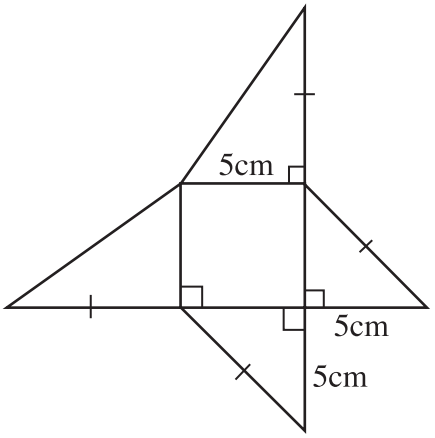
4 ارسم نشرا لهرم ثلاثي طول كل حرف منه 6cm.

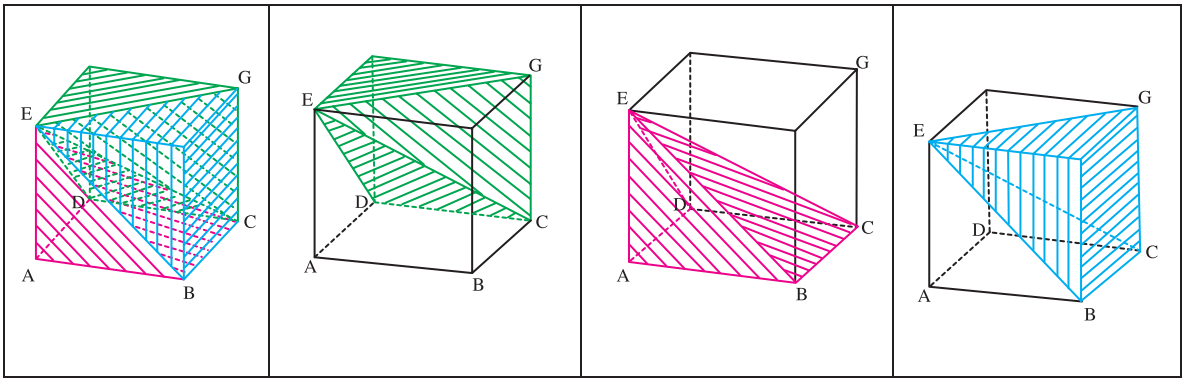
هرم قاعدته مثلث يسمى هرما ثلاثيا.

نشاط 3 يمثل الشكل المقابل نشرا لهرم قاعدته مربّع ضلعه 5cm.

ارسمه على ورق مقوّى وفقا لأبعاده الحقيقيّة و اصنعه

أ) قم مع زميلين لك بتركيب مكعّب باستعمال أهراماتكم الثلاثة. استنتج إذن حجم الهرم.

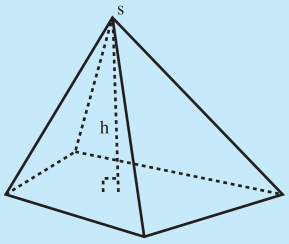




الحجم V لهرم مساحة قاعدته B وارتفاعه h هو :

$$V=\frac{1}{3}Bh$$

أي : $V=\frac{\text{مساحة القاعدة} \times \text{طول الإرتفاع}}{3}$

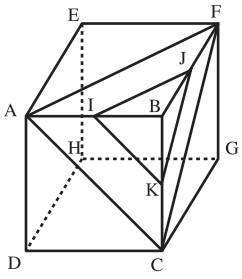


أطبق:

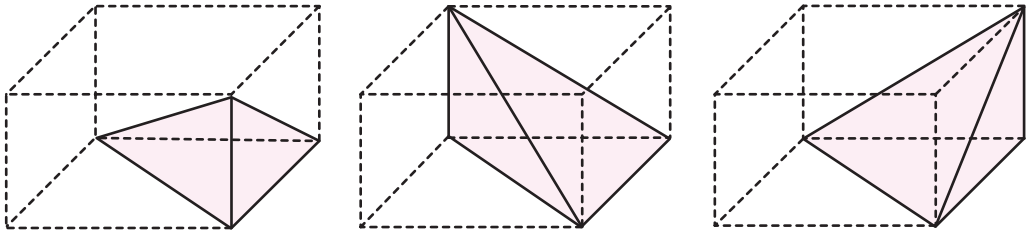
1 يمثل الشكل المقابل مكعبا طول حرفه 6 cm.

I و J و K هي منصفات الأحرف [AB] و [FB] و [CB] على التوالي.

ماذا يمثل حجم الهرم BIJK بالنسبة لحجم الهرم BAFC ؟.

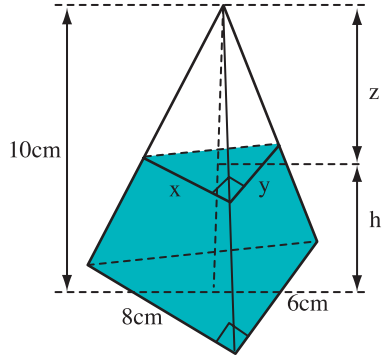


2 أي هذه الأهرامات له أكبر حجم ؟.



3 احسب ارتفاع الماء بهذا الوعاء علما بأن x و y و z أعداد كسرية متناسبة طردا على التوالي مع 8 و6 و 10.

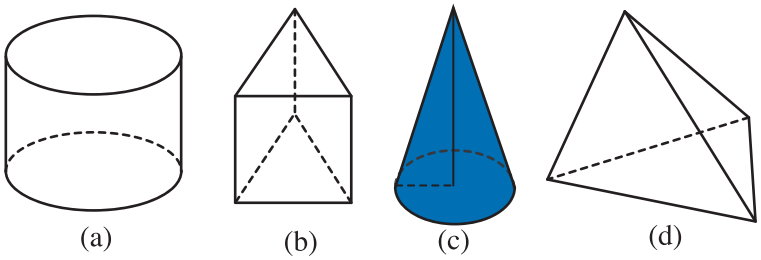
وأن حجم الماء يمثل 87,5 % من حجم الوعاء.



II المخروط

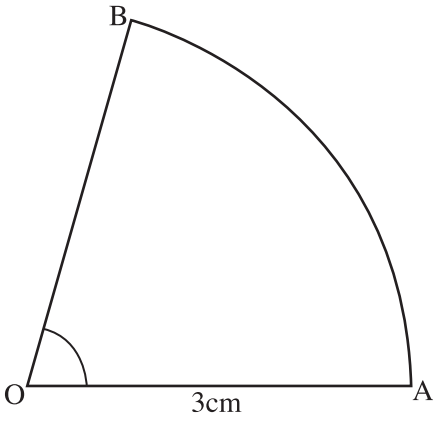
نشاط 1 فيما يلي رسوم منظورية لأربعة مجسمات .

حدّد من بينها الهرم والموشور القائم والإسطوانة الدائرية القائمة .

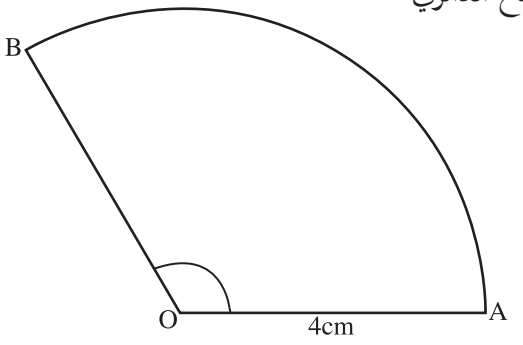


المجسم (c) يسمى مخروطا دورانيا .

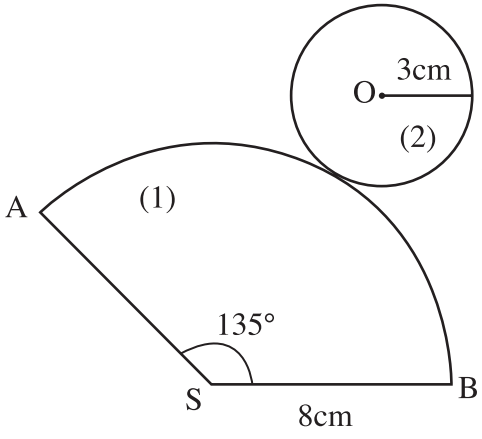
نشاط 2 أ) احسب $\overset{\frown}{AOB}$ إذا علمت أن مساحة القطاع الدائري التالي هي $\frac{15}{8}\pi\ cm^2$.



ب) احسب $\overset{\frown}{AOB}$ إذا علمت أن محيط القطاع الدائري المقابل هو $\frac{8}{3}\pi\ cm$.



نشاط 3 يمثل الرسم المقابل نشرا لمخروط دوراني حيث $A\hat{S}B = 135°$ و SA=SB=8cm.



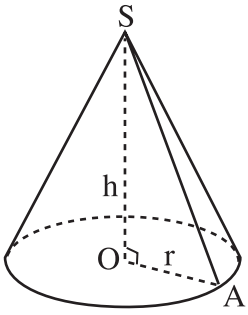
أ) احسب طول القوس $\overset{\frown}{AB}$ وتحقّق أنّه يساوي محيط القرص الدائري.

ب) أنقله على ورق مقوى وفق أبعاده الحقيقية .

ج) قم بقص الشكلين (1) و (2) .

د) ادر الشكل (1) حول الشكل (2) بحيث يحيط القوس الدائري $\overset{\frown}{AB}$ بالقرص الدائري الذي مركزه النقطة O.

مصطلحات



تسمّى النقطة S قمة المخروط و القرص الدائري **قاعدته**.

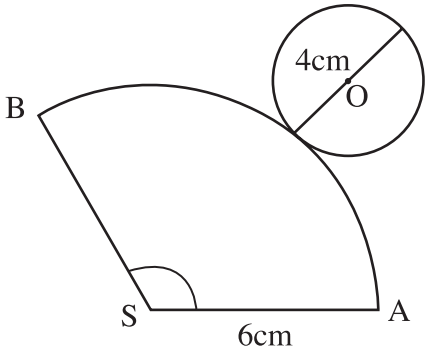
تسمى قطعة المستقيم $[SO]$ **ارتفاع** المخروط ونرمز له بـ h

تسمى قطعة المستقيم $[SA]$ **عمده** .

المخروط الدوراني هو مجسم قاعدته قرص دائري وارتفاعه يمثل بعد قمته عن مركز قاعدته.

ويسمى مخروطا ارتفاعه h وشعاعه r .

أطبق:

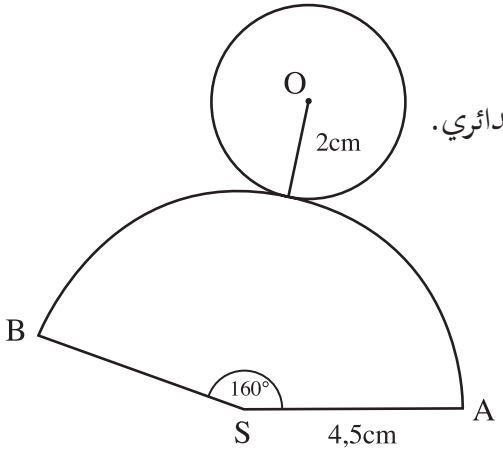


1 يمثل الرسم المقابل نشرا لمخروط قطر قاعدته 4cm وطول عمده 6 cm.

أ) احسب محيط القاعدة.

ب) استنتج أن الزاوية $A\hat{S}B = 120°$.

2 في ما يلي نشر لمخروط دورانيا .

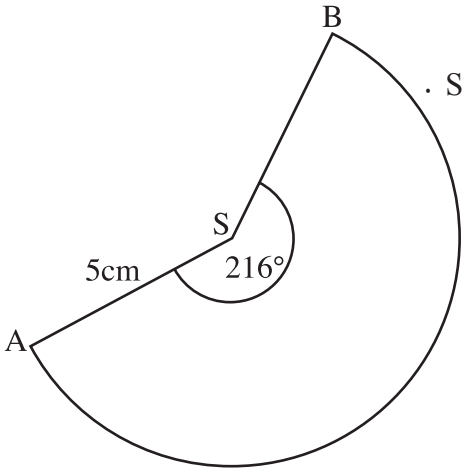


أ) تحقق أن طول القوس $\overset{\frown}{AB}$ يساوي محيط القرص الدائري.

ب) احسب المساحة الجانبية لهذا المخروط الدوراني.

ت) احسب مساحته الجملية .

نشاط 4 يمثل الشكل التالي نشرا للوجه الجانبي لمخروط دوراني قمته S .



أ) أنقله على ورق مقوى واصنعه.

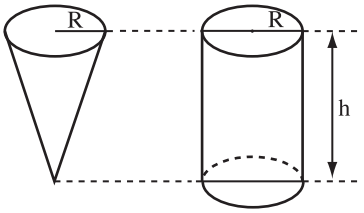
ب)اصنع اسطوانة دائرية قائمة شعاعها 3 cm وارتفاعها 4cm.

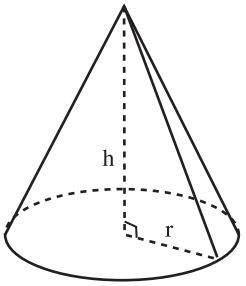
ج) لاحظ أن الاسطوانة والمخروط لهما نفس الارتفاع.

د) املأ المخروط بمسحوق واسكب محتواه في الإسطوانة.

اعد العملية حتى تمتلئ الإسطوانة.

هـ) كم من مرة ملأت المخروط لتتمكن من ملء الإسطوانة ؟.





حجم المخروط:

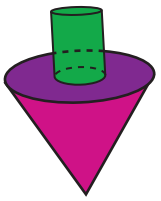
$$V=\frac{\text{مساحة القاعدة}\times\text{طول الإرتفاع}}{3}$$

أي $V=\frac{\pi\times r^2\times h}{3}$

حيث **h** ارتفاعه و **r** شعاع قاعدته

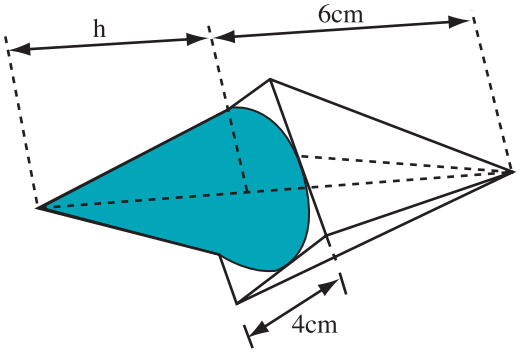
أطبق:

1 1) أحسب حجم الخذروف التالي حيث قطر الإسطوانة الدائرية القائمة 5mm وارتفاعها 15 mm وقطر المخروط 2 cm وارتفاعه 2 cm.



2) ما هي كتلة الخذروف علما أن كتلة الصنتمتر المكعب الواحد من الخشب الّذي صنع منه هي 0,8g ؟

2 تأمل الشكل المقابل

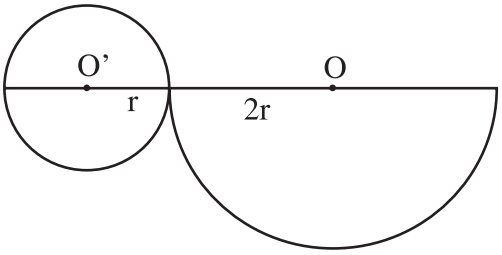


أ) أحسب ارتفاع المخروط إذا كان له نفس حجم الهرم.

ب) إذا كان ارتفاع المخروط h=5cm

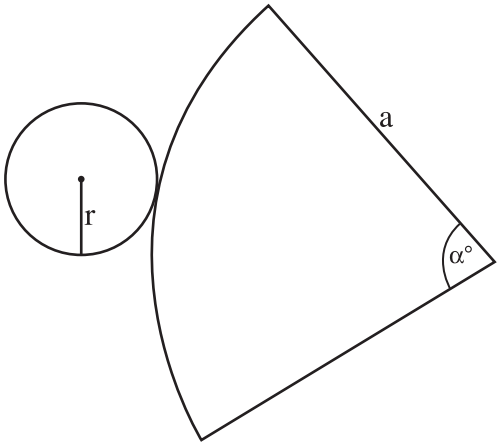
ما هي نسبة حجمه من حجم الهرم ؟.

3 1) أ) بين أن هذا الشكل هو نشرا لمخروط.



ب) أحسب المساحة الجانبية S لمخروط طول عمده a وشعاعه r حيث:

a=6cm و r=3cm.



2) نعتبر مخروطا طول عمده a وشعاعه r

أ) أحسب α بدلالة a و r.

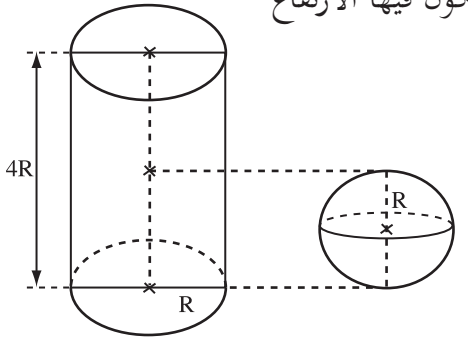
ب) أحسب S المساحة الجانبية لهذا المخروط.

III الكرة

نشاط 4 برهن العالم اليوناني ارخميدس أنّ كلّ اسطوانة يكون فيها الارتفاع ضعف قطر القاعدة

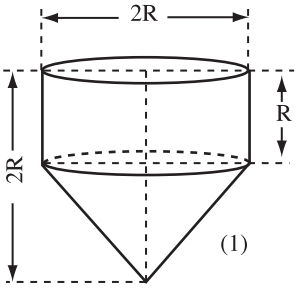
تسع ثلاث كرات لها نفس قطر الاسطوانة.

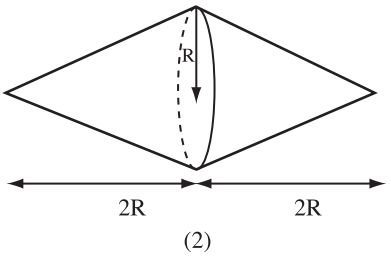
استنتج حجم كرة قطرها 2R.



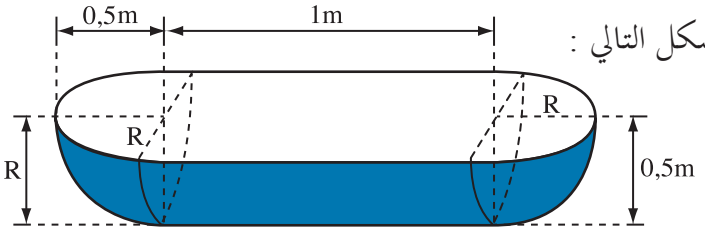
أطبق:

1 1. هل للجسمين التاليين نفس الحجم ؟

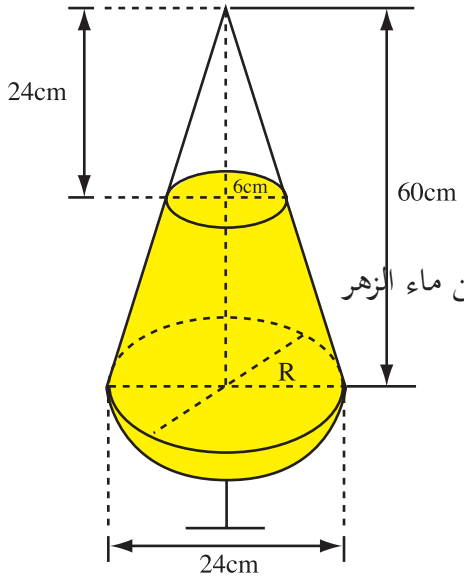




2. أحسب باللتر سعة الحوض الممثل بالشكل التالي :



3. يمثل الرسم المقابل مشكاة (قارورة ماء زهر).

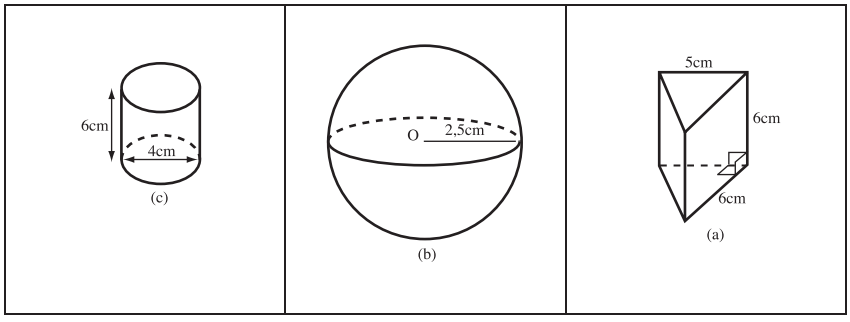


1) أحسب حجم ماء الزهر فيها .

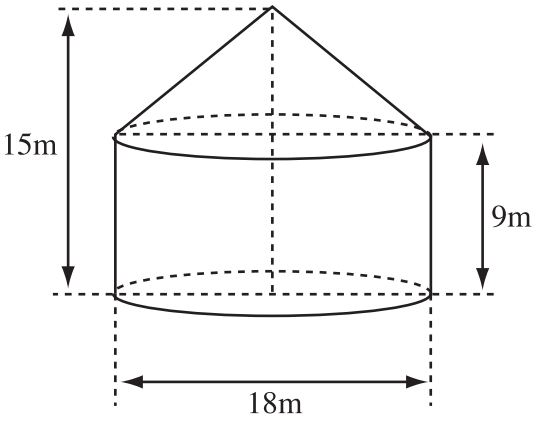
2) ما هي النسبة المائوية لماء الزهر بالمشكاة ؟.

3) ما هو ثمن هذه المشكاة إذا علمت أن ثمن اللتر الواحد من ماء الزهر يساوي تسعة دنانير وأن ثمن المشكاة فارغة ديناران.

4. رتّب أحجام المجسمات التالية



مسألة :



يمثل الشكل المقابل **خزّانا** للقمح.

1) احسب حجمه.

2)كم من قنطار من القمح يمكن أن يحويه هذا الخزان على أن لا يفوق ذلك 90% من حجمه

علما أنّ كتلة القمح هي(تقريبا) $800Kg/m^3$

(أي 800Kg يوافق $1m^3$).

3) كم نحتاج من خزّان من هذا النوع

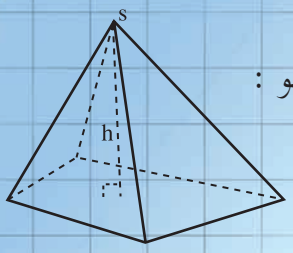
إذا كان لدينا 20000 هكتار

و معدل إنتاج القمح بها هو 40 قنطار بالهكتار ؟

الكرة الأرضية

أهرامات الجيزة بمصر

أحوصـل



- الحجم V لهرم مساحة قاعدته B وارتفاعه h هو :

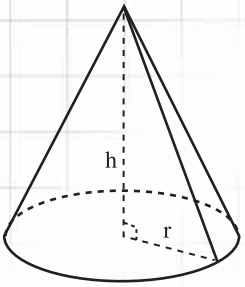
$$V=\frac{1}{3}Bh$$

أي : $V=\frac{\text{مساحة القاعدة} \times \text{طول الإرتفاع}}{3}$

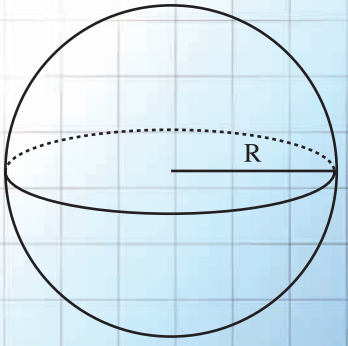
- المخروط الدوراني هو مجسم قاعدته قرص دائري وارتفاعه يمثل بعد قمته عن مركز قاعدته.

حجم المخروط: $V=\frac{\pi r^2 h}{3}$ أي $V=\frac{\text{مساحة القاعدة} \times \text{طول الإرتفاع}}{3}$

حيث h ارتفاعه و r شعاع قاعدته.



- $V=\frac{4}{3}\pi R^3$ هو حجم كرة قطرها 2R



تمارين

1 حول إلى اللتر (l) ثم إلى الديسلتر (dl) المقادير التالية .

أ) $250cl;24dal;633dam^3;92cm^3$

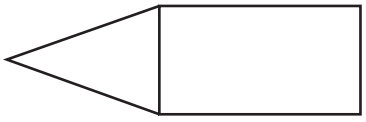
ب) $0,06m^3;750ml;4hl;8,9m^3$

2 أ) سلك من النحاس اسطواني الشكل قطره 2mm وطوله 1m .أحسب حجمه .

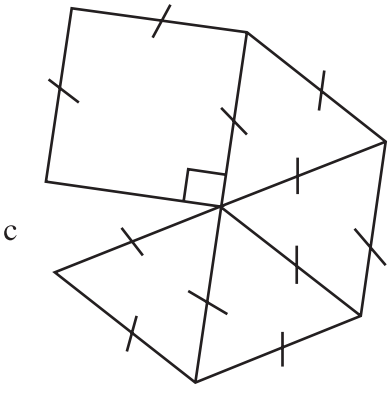
ب) إذا علمت بأن في $1mm^3$ من النحاس توجد $8,9\times10^{19}$ ذرة كم هو عدد الذرّات في هذا السلك ؟.

3 يمثل الشكل المقابل جزءا من نشر لهرم أوجهه الجانبية مثلثات متقايسة الضلعين،

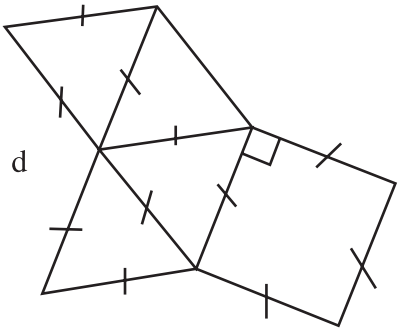
وقاعدته مستطيل.أنقله على كراسك ثم أتمم نشره.



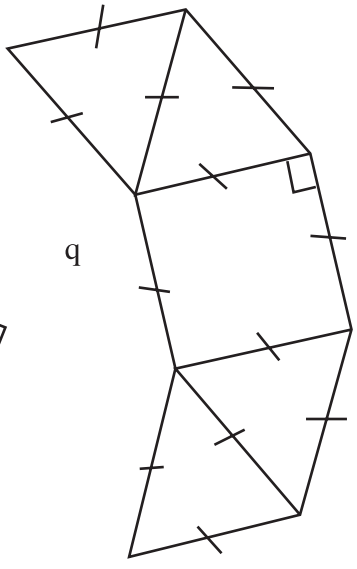
4 حدّد من بين الأشكال التالية ما هي التي تمثل نشرا لهرم ؟.



c



d

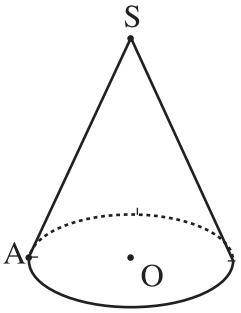


q

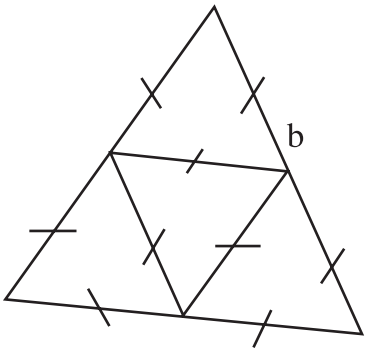
5 يمثل الشكل المقابل مخروطا دورانيّا قمته S ومركز قاعدته O .

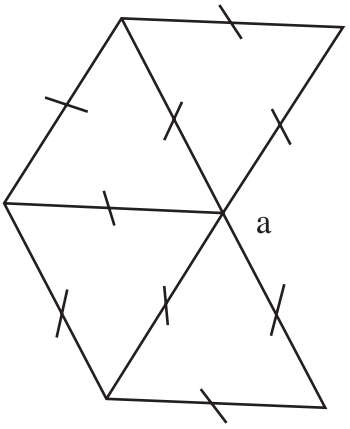
أحسب ارتفاعه OS ومساحته الجانبية إذا علمت

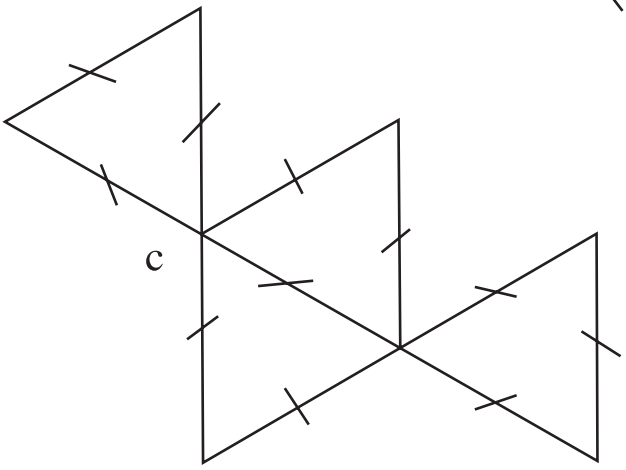
أنّ مساحة قاعدته $625\pi m^2$.وحجمه $12500m^3$.و $SA = 65m$.



6 أ) حدّد من بين الأشكال التالية المجسمات التي تمثل نشرا لهرم



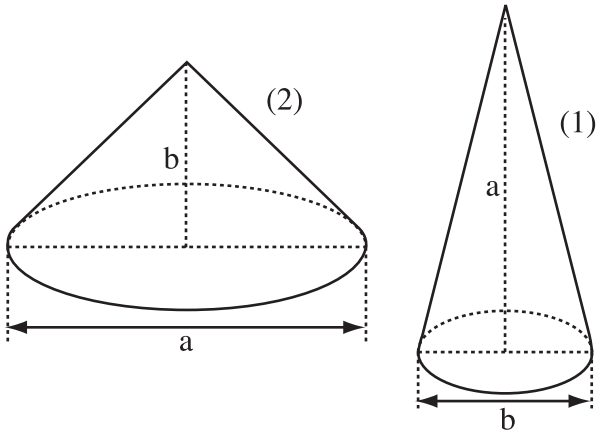




ب) ارسم متوازي الأضلاع ABCD بحيث AB=8cm و AD=4cm و $\widehat{BAD}=120°$ و اصنع به هرما ثلاثي منتظم حرفه 4cm معللا ذلك.

7 خيمة في شكل مخروط دوراني قطرها 4m وارتفاعها 3m . كم من شخص يمكن له الإقامة تحت الخيمة علما أنّ كمية الهواء اللازمة لكل فرد للتنفس طبيعيا هي $2,5m^3$.

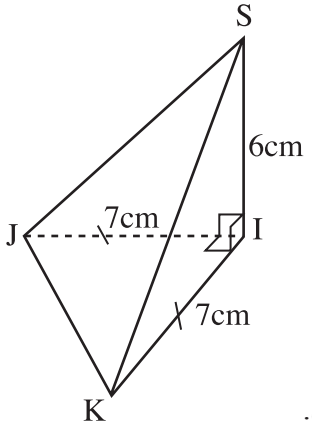
8 نعتبر المجسّمين التاليين حيث $a > b$.قارن حجميهما .



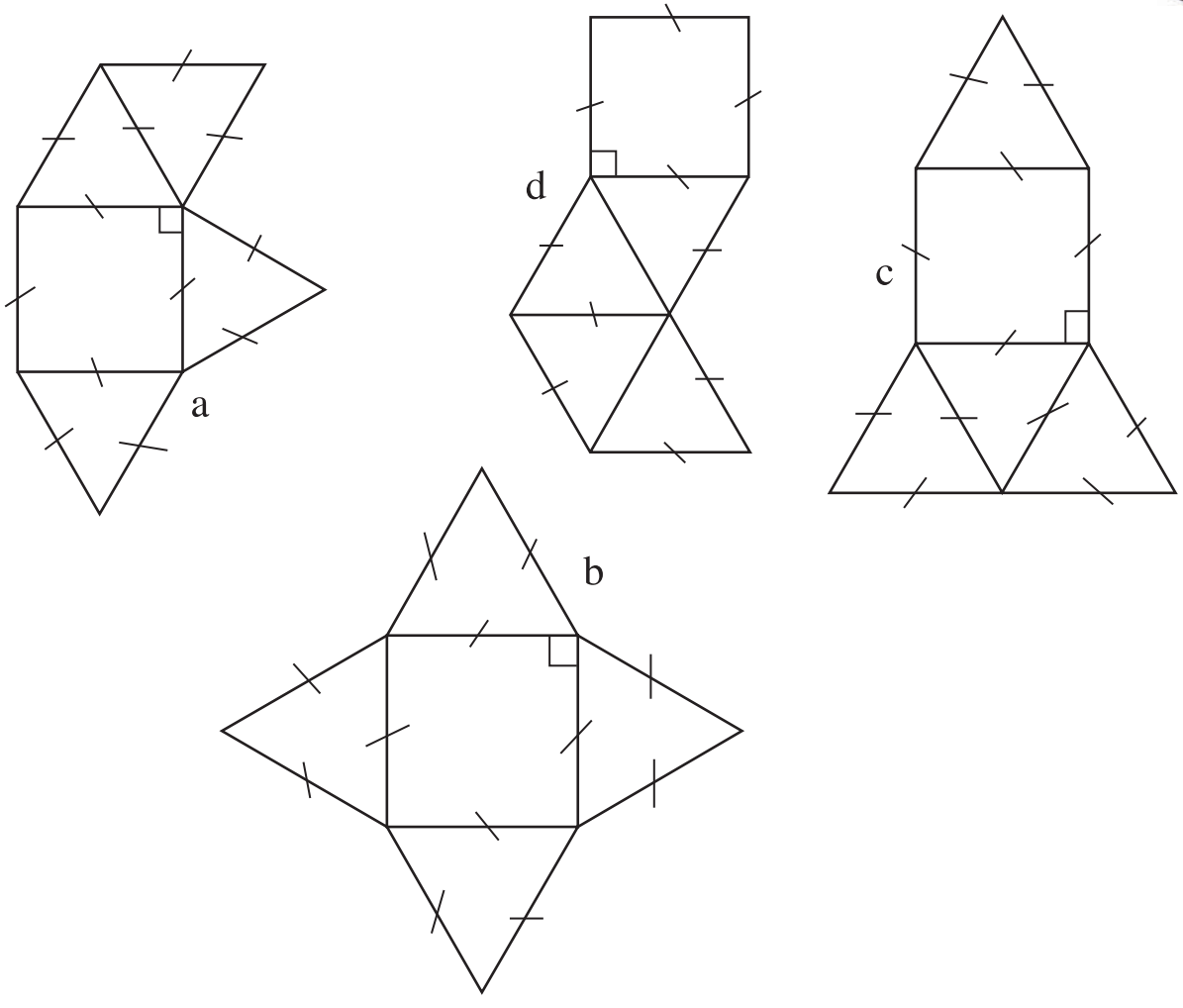
9 يمثل الشكل المقابل رسما منظوريّا لهرم قمته S و قاعدته IJK مثلثا قائما في I .

1) أنجز نشرا له.

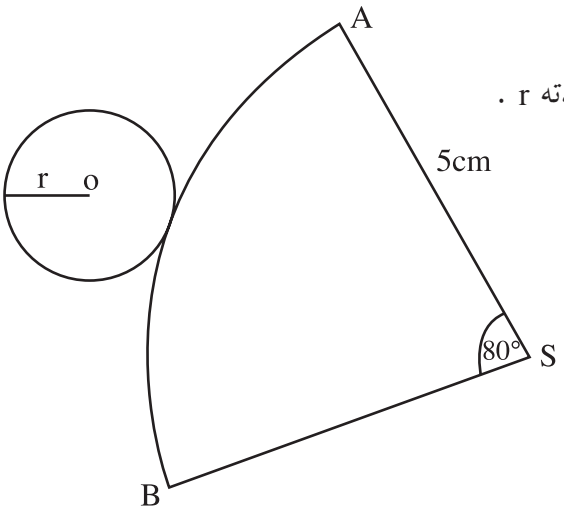
2) أحسب حجمه .



10 حدّد من بين الأشكال التالية كل شكل يمثل نشرا لهرم.



11 الشكل المقابل يمثّل نشرا لمخروط دائري قائم قمته S.أحسب طول القوس $\overset{\frown}{AB}$ وشعاع قاعدته r .



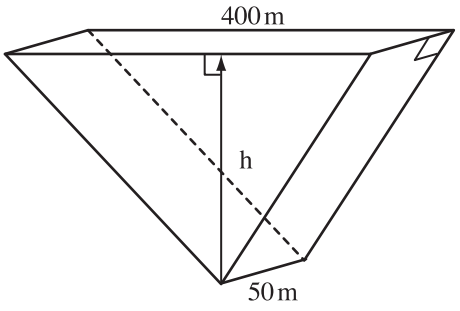
12 كرة القدم قطرها 24 cm أحسب حجمها .

13 هرم كيوبس هو هرم قاعدته مربع ضلعه 233m وارتفاعه 146m.

إذا أخذنا الحجر الذي يكون هرم كيوبس (لا نعتبر الفراغات التي بداخله) و أردنا أن نبني به سدا على شكل موشور قائما ثلاثي القاعدة.سمك السد 50m و طول أحد أضلع قاعدته 400m.

يمثل الشكل المقابل تصميما لهذا السدّ.

ما هو ارتفاع قاعدته ؟



14 كرة ومخروط لهما نفس الشعاع r و نفس الحجم V .احسب h ارتفاع المخروط بدلالة r .

15 ما هو حجم الكرة الأرضية إذا علمت أن شعاعها يساوي تقريبا 6366km؟

16 كرة حديدية قطرها 20 cm.

ما هي كتلتها إذا علمت أن كتلة $1dm^3$ من الحديد توافق $7,9kg$ ؟

17 أحسب قطر كرة حجمها $\frac{500\pi}{3} cm^3$.

16 التوازي في الفضاء

I المستوي في الفضاء

II مستقيم محتو في مستوي

III الوضعيّات النسبيّة لمستقيمين

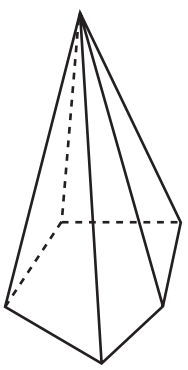
IV الوضعيّات النسبية لمستقيم و مستوي

V الوضعيّة النسبية لمستويين

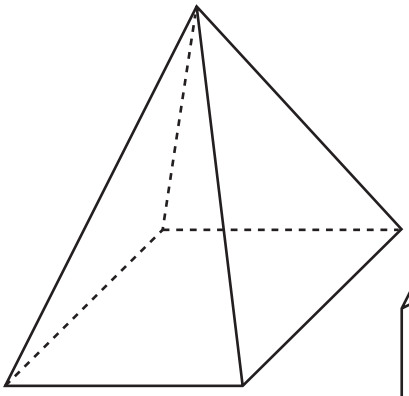
التوازي في الفضاء

أستحضـــر :

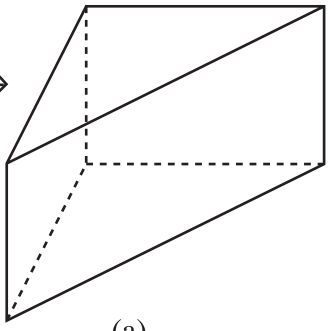
1 لاحظ المجسمات التّالية ثمّ انقل الجدول أسفله وأكمله :



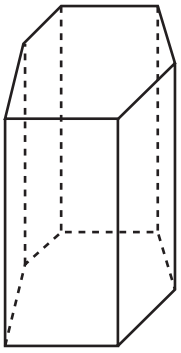
(c)



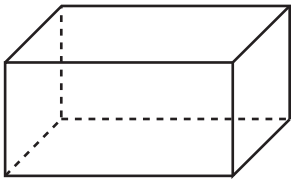
(b)



(a)



(c)

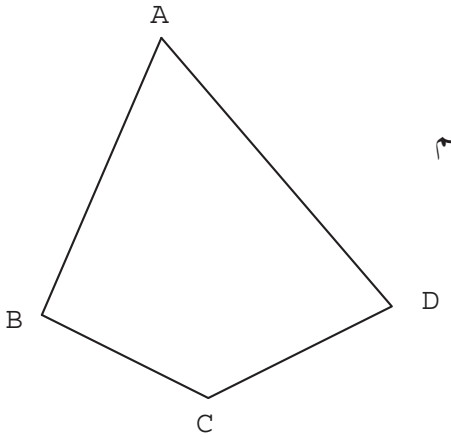


(d)

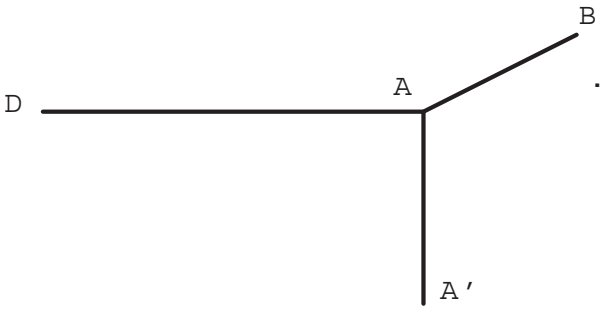
المجسّم	(a)	(b)	(c)	(d)	(e)
اسمه					
عدد قممه					
عدد أحرفه					
عدد أوجهه الجانبيّة					
شكل قاعدته					
عدد أحرفه الخفيّة					
عدد أوجهه الخفيّة					

2 ارسم على كراسك مكعّبا

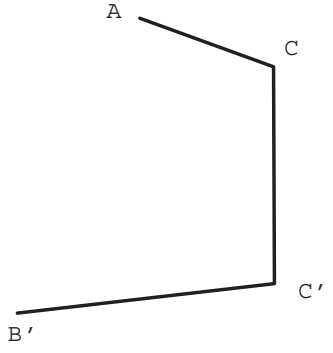
3 انقل الشكل المقابل ثمّ أكمله لتتحصّل على رسم منظوري للهرم ABCD



4 يمثّل الرّسم المقابل ثلاثة أحرف لمتوازي المستطيلات $ABCDA'B'C'D'$.
انقله وارسم بقية أحرف المجسّم.



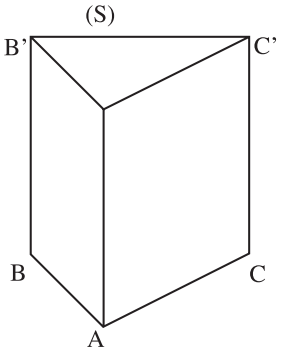
5 يمثّل الرّسم المقابل ثلاثة أحرف لموشور قائم $ABCA'B'C'$ انقله وارسم بقيّة أحرف المجسّم.

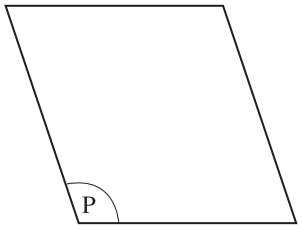


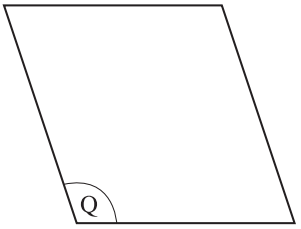
أستكشـــف واطبق :

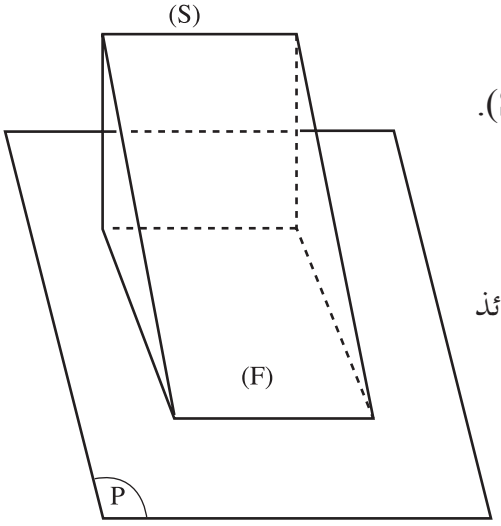
I المستوي في الفضاء

نشاط 1 أ- اصنع من الورق المقوّى مجسّما (S) في شكل موشور قائم ABCA'B'C' وصفيحتين مستطيلتي الشّكل (P) و (Q) كما هو مبيّن أسفله.









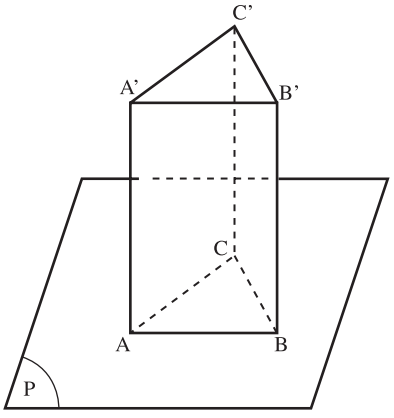
ب- ضع الصفيحة (P) ملاصقة لأحد أوجه المجسّم (S).

لاحظ أنّ كلّ نقطة من الوجه تنطبق على نقطة من الصفيحة (P).

فإذا تصوّرنا الصفيحة غير محدودة الجهات نحصل عندئذ على مستوي نرمز له بـ P و هو مستوي ذلك الوجه.

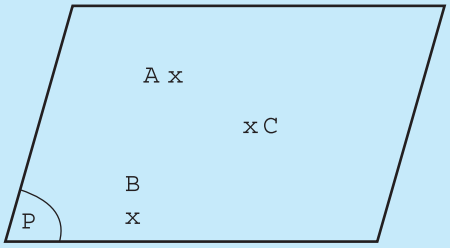
نقول إنّ الصفيحة (P) تمثّل مستويا P وكذلك الصفيحة(Q) تمثّل مستويا Q و أنّ كلّ وجه من (S) يحدّد مستويا من الفضاء.

نشاط 2

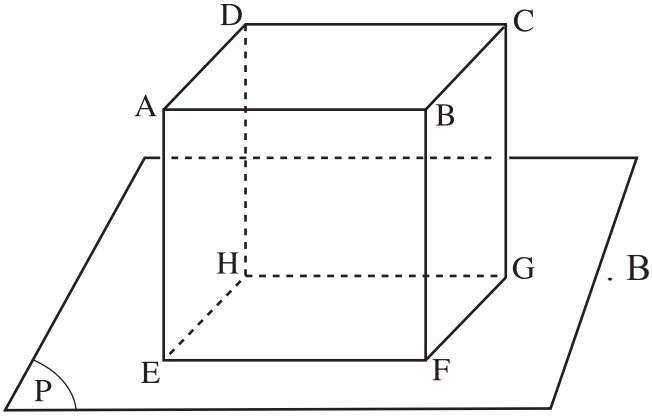


أ) ضع الصفيحة (P) ملاصقة للقمم ثلاث A و B و C من الجسم (S) ولاحظ أنّ كلّ نقاط الوجه ABC قد التصقت بالصفيحة أي أنّ مستوي الوجه ABC ومستوي الصفيحة (P) ينطبقان.

ب) ضع الصفيحة (Q) ملاصقة للقمم A′ و B′ و C′ من الجسم (S). ماذا تلاحظ ؟

ثلاث نقاط من الفضاء ليست على استقامة واحدة تحدّد مستويا واحدا.		نرمز للمستوي المحدّد بالنقاط A و B و C بـ (ABC).

تطبيق :



1 يمثل الشكل المقابل مكعّبا ABCDEFGH

و المستوي P المحدّد بالنقاط E و F و G.

1) اذكر مستويين تنتمي لهما كلّ من النقطتين A و B .

2) اذكر نقاط من المكعّب تنتمي إلى المستوي P

و أخرى لا تنتمي إليه.

3) أ) هل أنّ النقطة E تنتمي إلى المستوي (ADH) ؟

ب) هل أنّ النقطة B تنتمي إلى المستوي (ADH) ؟

II مستقيم محتو في مستوي

نشاط 1

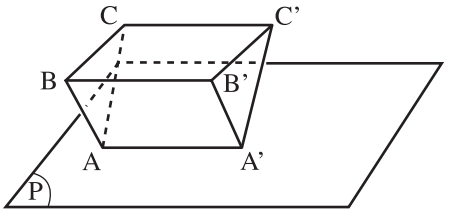
1) ضع الصفيحة (P) ملاصقة للقمّتين A و A' من المجسم (S).

2) هل توجد نقاط من [AA'] لا تنتمي

إلى الصفيحة (P) ؟

3) هل توجد نقطة من المستقيم (AA') لا تنتمي

إلى المستوي P ؟



كلّ نقطة من المستقيم (AA') تنتمي إلى المستوي P. نقول أنّ المستقيم (AA') محتو في المستوي P

ونكتب $(AA') \subset P$.

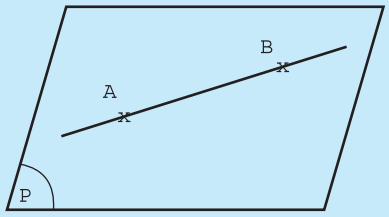
نقول عن مستقيم أنه محتو في مستو إذا كانت كل نقاط هذا المستقيم تنتمي إلى ذاك المستوي.

مستقيم D محتو في مستويP يعني كلّ نقطة منD تنتمي إلى المستويP ونكتب $D \subset P$

إذا كانت لمستقيم نقطتان مشتركتان مع مستوي فهو محتو في هذا المستوي

أي

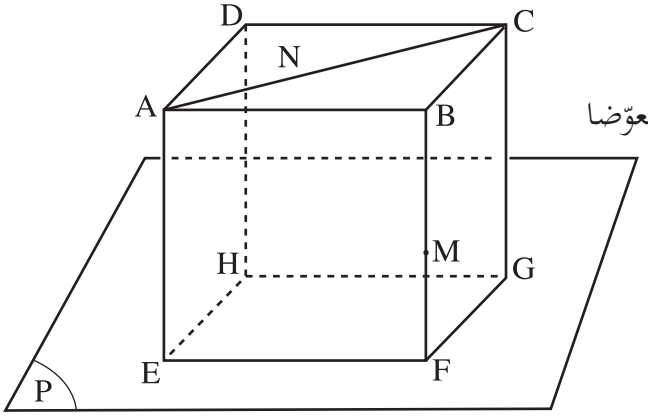
إذا كان A و B نقطتين مختلفتين من مستوي P فإنّ $(AB) \subset P$.



تطبيق :

1 لاحظ الشّكل المقابل وانقل الجمل أسفله معوّضا في كل مرّة النّقاط بأحد الرموز التّالية :

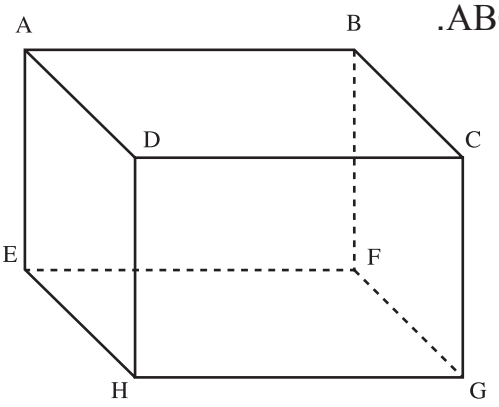
$\in, \notin, \subset, \not\subset$.



M… (BEF) , A… (EFG) , A… (EBC) , (BM)… (AEF) , M… (BEG) , (BN)… (BHC) , C…(DHF) , M…(ABG) , (BN)… (ADC) , N…(AFC) , (GM)… (BCF) , (FN)…(AEC)

III الوضعيّات النسبيّة لمستقيمين

نشاط 4 يمثل الشكل المقابل متوازي المستطيلات ABCDEFGH.



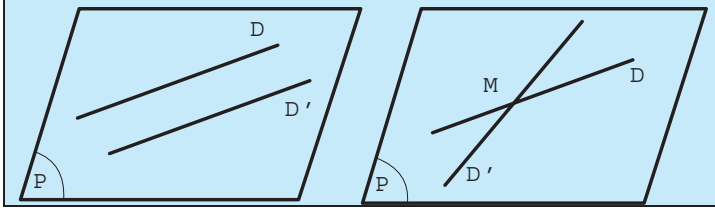
أ) اذكر مستقيمين محتويين في المستوي (ABC) ومتوازيين.

ب) اذكر مستقيمين محتويين في المستوي (BCG) ومتقاطعين.

ج) اذكر مستقيمين محتويين في المستوي (ADH).

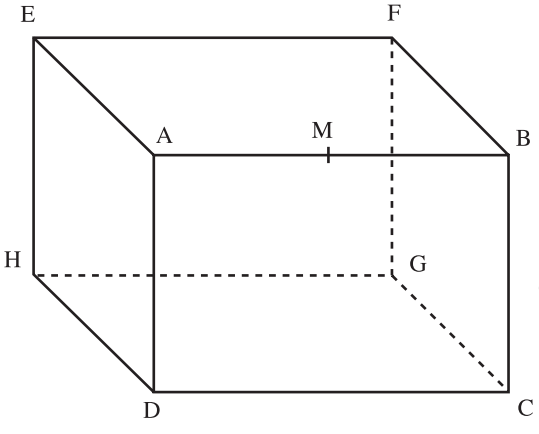
ما هي وضعيتهما النسبيّة ؟

مستقيمان من نفس المستوي هما متوازيان أو متقاطعان



مستقيمان متوازيان هما مستقيمان محتويان في نفس المستوي وغير متقاطعين.

تطبيق :



لاحظ الشّكل المقابل حيث M نقطة من[AB].

1) أ- ما هو المستوي الذي يحوي كلاّ من المستقيمين (CM) و (AB) ؟

ب – ما هي الوضعيّة النسبيّة للمستقيمين (CM) و (AB) ؟

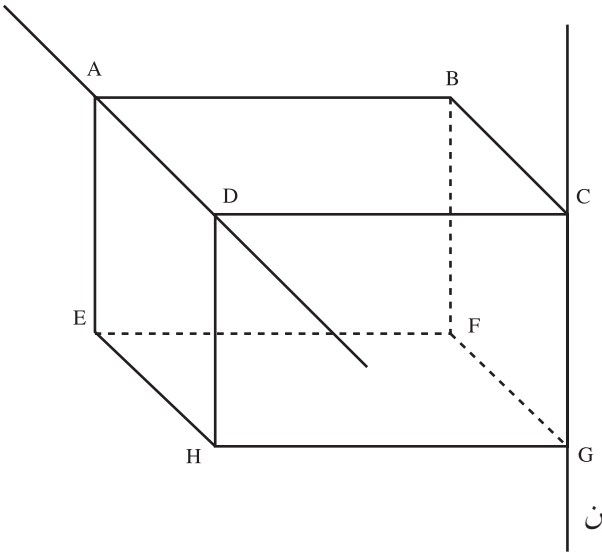
2) أجب عن السّؤال السّابق بالنسبة إلى المستقيمين المقدّمين في كلّ حالة من الحالات التّالية :

- (EM) و (AF)
- (HG) و (EF)
- (HM) و (AB)

3) اذكر مستقيمين متقاطعين و آخرين متوازيين في مستوي الوجه ABFE.

نشاط

5 يمثّل الشكل المقابل متوازي المستطيلات ABCDEFGH



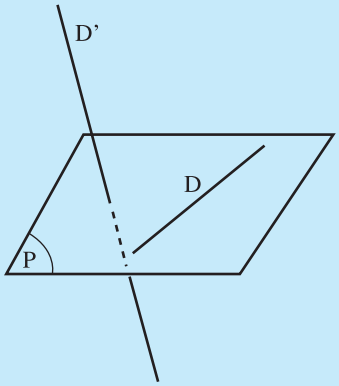
1) أ- اذكر مستوي يحوي المستقيم (AD).

ب- اذكر مستوي يحوي المستقيم (CG).

ج- هل يوجد مستوي يحوي كلا المستقيمين (AD) و (CG) ؟

نلاحظ أن المستقيمين(AD) و (CG) غير متوازيين وغير متقاطعين نقول إنهما **ليسا في نفس المستوي.**

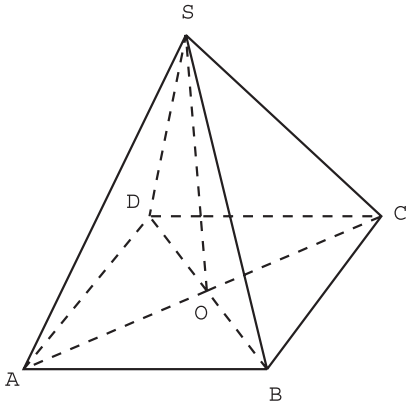
2) اذكر مستقيمين آخرين ليسا في نفس المستوي.

مستقيمان ليسا في نفس المستوي يكونان غير متوازيين و غير متقاطعين.	

اطبق:

يمثّل الشّكل المقابل هرما قاعدته مربّع.

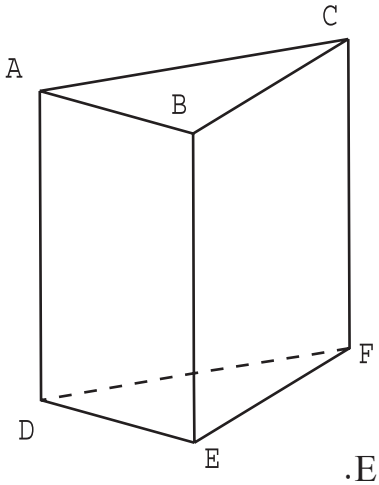
انقل الجمل التّالية وأكمل الفراغات بـ : متقاطعان أو متوازيان أو ليسا في نفس المستوي.



- (SB) و (DC) هما مستقيمان.....
- (AD) و (BC) هما مستقيمان .....
- (AC) و (SO) هما مستقيمان .....
- (SC) و (DB) هما مستقيمان .....

IV الوضعيّات النسبية لمستقيم و مستوي

نشاط 1 يمثّل الشّكل المقابل موشورا قائما ABCDEF.



ليكن P مستوي الوجه EFD .

أكمل

$(AE) \cap P = ...$

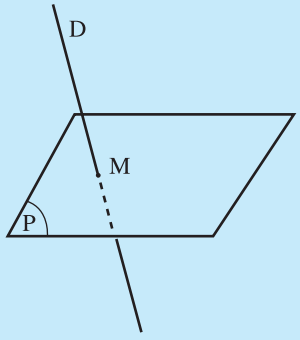
$(BD) \cap P = ...$

$(CF) \cap P = ...$

المستقيم (AE) يقطع المستوي P في نقطة واحدة E .

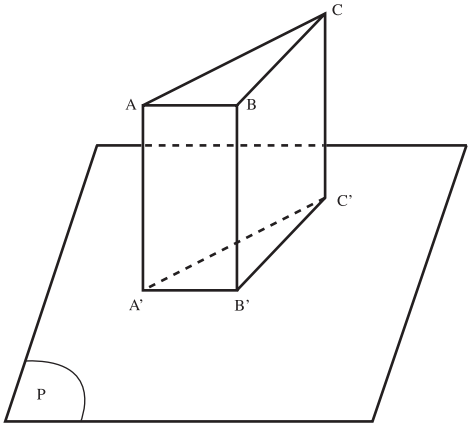
نقول أنّ المستقيم (AE) و المستوي P متقاطعان في النّقطة E.

إذا كان لمستقيم ومستوي نقطة مشتركة واحدة نقول إنهما متقاطعان في تلك النقطة.



$P \cap D = \{M\}$

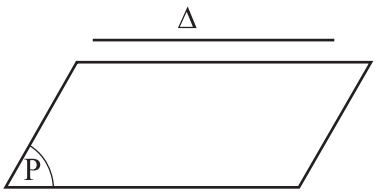
نشاط 2 1) لاحظ المجسّم المقابل حيث ABCA'B'C' موشور قائم و (P) مستوي القاعدة A'B'C'.



أ) اذكر حرفا و وجها ليس لهما نقطة مشتركة.

ب) هل أنّ المستقيم (AB) قاطع للمستوي P ؟

د) اذكر مستقيما آخر لا يقطع المستوي P ؟

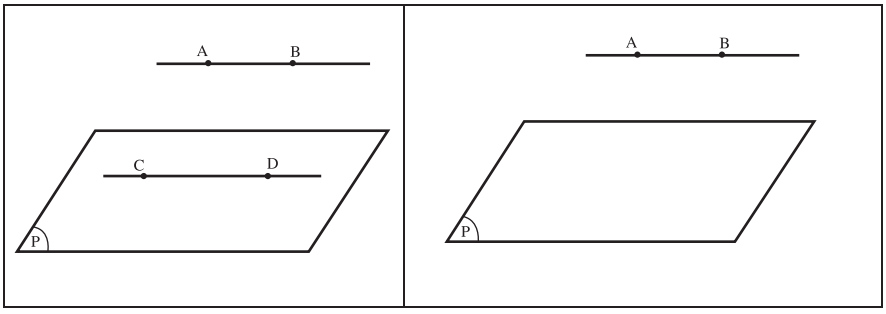
عندما يكون مستقيم و مستوي غير متقاطعين نقول أنّهما متوازيان	 $P \cap \Delta = \varnothing$

2) أ) اذكر مستقيما محتو في P و موازي لـ (AB)

إذا كان مستقيم موازيا لمستقيم من مستوي فهو مواز لهذا المستوي.

ب)اذكر مستقيما محتو في P و موازي لـ (AC). ماذا تستنتج بالنّسبة للمستوي P و المستقيم (AC) ؟

ج) أثبت أنّ المستقيم (BC) و المستوي P متوازيان.



$(AB) \cap P = \varnothing$

اطبق :

1

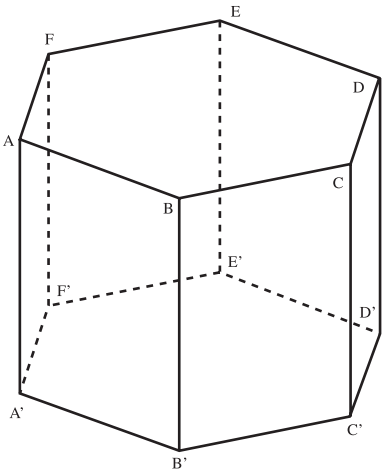
يمثّل الشكل المقابل موشورا قائما حيث $(EF) \parallel (BC)$.

أ) اذكر ثلاثة مستقيمات قاطعة لمستوي الوجه AA'B'B

ب) هل أن المستقيم (BC) قاطع لمستوي الوجه EE'F'F ؟

ج) اذكر ثلاث مستقيمات موازية للمستوي (ABC).

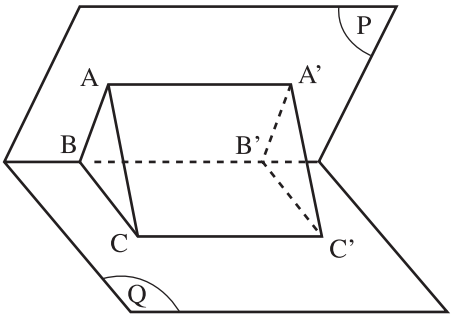
د)هل أنّ المستقيم (BB') موازي للمستوي (EDE') ؟



V الوضعيّة النسبية لمستويين

مستويان متقاطعان

نشاط 8

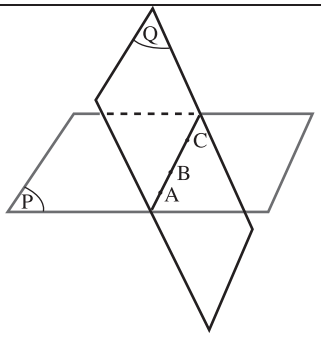


لاحظ الرسم التّالي حيث ABCA'B'C' موشور قائم و (P) مستوي الوجه $AA'B'B$ و (Q) مستوي الوجه $BB'C'C$

أ) بيّن أنّ المستقيم (BB') محتو في المستوي P وفي المستوي Q.

ب) هل توجد نقاط مشتركة بين المستويين P و Q لا تنتمي إلى (BB') ؟

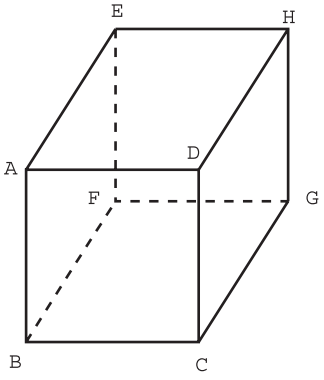
نقول أن المستويين P و Q متقاطعان ونكتب $P \cap Q = (BB')$.



إذا كانت A وB وC ثلاث نقاط مشتركة بين مستويين متقاطعين فهي على استقامة واحدة.

اطبّق :

1 يمثّل الشّكل المقابل متوازي المستطيلات ABCDEFGH.



حدّد تقاطع المستويين المقدّمين في كل حالة :

أ) (ABC) و (DHG)

ب) (GBF) و (AEF)

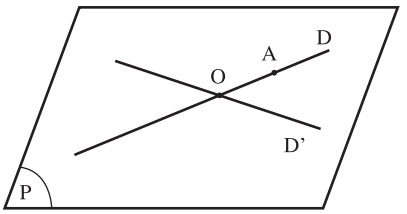
ج) (DBF) و (CGH).

2 يمثّل الشكل المقابل مستقيمين D و D′ متقاطعين في نقطة O ومحتويين في المستوي P و A نقطة من D.

M نقطة لا تنتمي إلى المستوي P.

نعتبر المستوي Q المحدّد بالنقطة M والمستقيم D

والمستوي R المحدّد بالنقطة M والمستقيم D' .



1) أ) هل أنّ النّقطة A تنتمي إلى المستوي R ؟

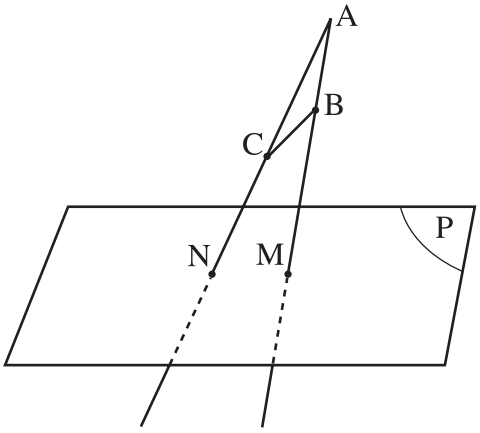
ب) استنتج أنّ R و Q مستويان غير منطبقين.

2) حدّد تقاطع المستويين Q و R.

تمرين مرفق بحل :

أ) انقل الشّكل المقابل حيث

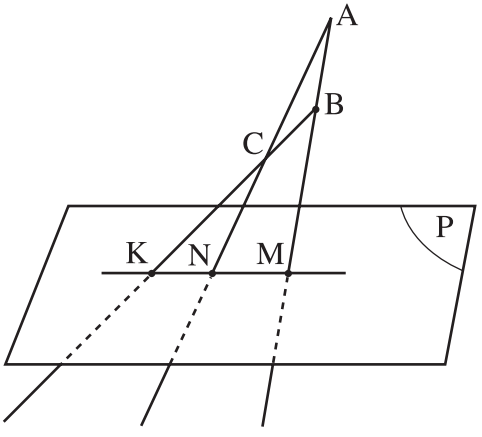
- M و N نقطتان من المستوي P
- A و B و C ثلاث نقاط ليست على استقامة واحدة ولا تنتمي إلى P
- (MN) و (BC) غير متوازيين.



ب) أثبت أنّ (BC) و P متقاطعان في نقطة K حيث M و N و K على استقامة واحدة.عيّن النّقطة K .

الحل :

أ) **الرسم**



ب) تنتمي كلّ من النقطتين M و N إلى المستويين (ABC) و P.

لنا P و(ABC) غير منطبقان لأنّ $A \notin P$ و $A \in (ABC)$

إذن يتقاطع هاذان المستويان وفق المستقيم (MN).

و بالتالي $P \cap (ABC) = (MN)$

المستقيمان(MN) و(BC) محتويان في المستوي (ABC)

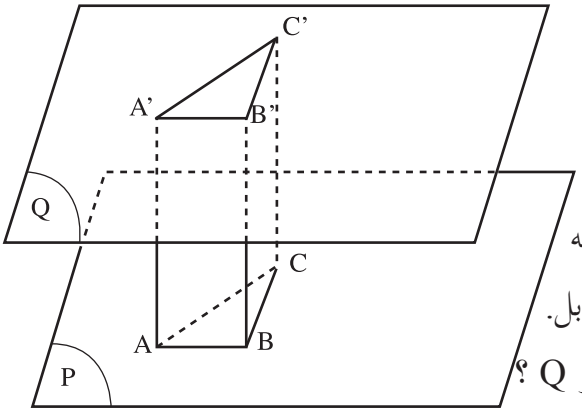
وهما غير متوازيين إذن فهما متقاطعان.

بما أن المستقيم (BC) غير محتو في المستوي P ($B \notin P$) ويقطع (MN) ($(MN) \subset P$)

إذن (BC) يقطع P في نقطة تقاطعه مع (MN) وهي النّقطة K. إذن $P \cap (BC) = \{K\}$.

النّقطة K تنتمي إلي المستقيم (MN) وبالتّالي النّقاط M و N و K على استقامة واحدة.

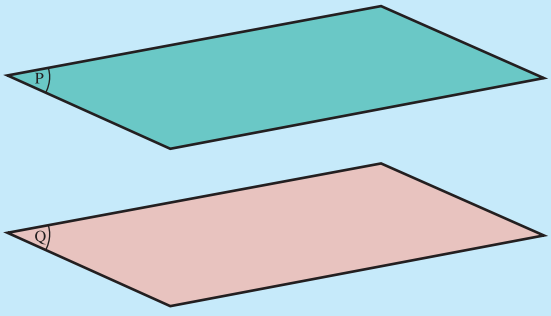
مستويان متوازيان



نشاط 8 أ) ضع الصفيحة (P) ملاصقة للوجه ABC من المجسّم (S) و الصفيحة (Q) ملاصقة للوجه A'B'C' من نفس المجسّم كما في الشّكل المقابل.

ب) هل هناك نقاط مشتركة بين المستويين P و Q ؟

المستويان P و Q ليسا متقاطعين نقول أنهما متوازيان ونكتب: $P//Q$ أو $Q//P$

مستويان متوازيان هما مستويان غير متقاطعين	

تطبيق :

ليكن P و Q مستويين متوازيين.

أجب بـ "صواب" أو " خطأ " معلّلا جوابك

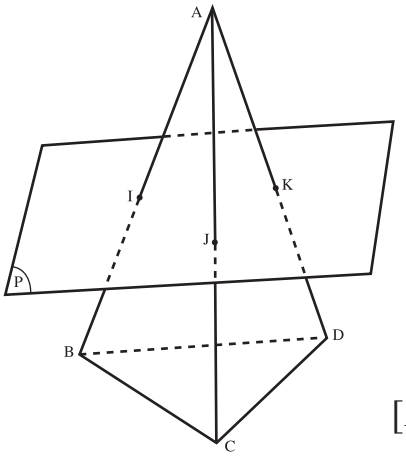
أ) كلّ مستقيم من المستوي P هو موازي للمستوي Q

ب) كلّ مستقيم من المستوي Q هو موازي لكلّ مستقيم من المستوي P

تمارين مرفقة بحلول :

1 يمثل الشكل المقابل هرما ثلاثيا ABCD ومستويا P موازيا للمستوي (BCD). قطع المستقيم [AB] و [AC] و [AD] تقطع المستوي P على التوالي في Iو J و K.

بين أن (BC) // (IJ) و (CD) // (JK) و (BD) // (IK).



الحل :

لدينا

* المستقيم (IJ) محتو في المستويP

* المستقيم (BC) محتو في المستوي (BCD)

* $P \cap (BCD) = \varnothing$

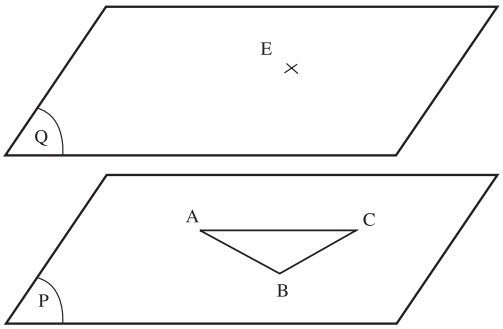
إذا $(IJ) \cap (BC) = \varnothing$

وبما أنّ (IJ) و (BC) محتويان في نفس المستوي (ABC) فإنّ (IJ) // (BC).

بنفس الطريقة نبيّن أنّ (CD) // (JK) و (BD) // (IK).

2 يمثّل الشكل المقابل مستويين متوازيين P و Q.

لتكنE نقطة من Q وA وB وC ثلاثة نقاط من P ليست على استقامة واحدة.



أ) بيّن أنّ المستويين (ABE) و Q متقاطعان.

ب) نعتبر المستقيم Δ تقاطع المستويين (ABE) و Q.

حدّد $\Delta \cap (AB)$

ج) استنتج أنّ Δ و (AB) متوازيان.

الحل :

أ) لنا $A \in (ABE)$ و $A \notin Q$ إذا المستويين (ABE) و Q غير منطبقان.

وبما أنّ $E \in (ABE)$ و $E \in Q$ فإنّ المستويين (ABE) و Q متقاطعان.

ب) $(ABE) \cap Q = \Delta$

Δ مستقيم محتو في المستوي Q و(AB) مستقيم محتو في المستوي P ونعلم أنّ $P \cap Q = \varnothing$

إذن $\Delta \cap (AB) = \varnothing$.

ج) بما أنّ Δ و (AB) محتويان في نفس المستوي (ABE) ولا يتقاطعان ($\Delta \cap (AB) = \varnothing$)

فإنّهما متوازيان.

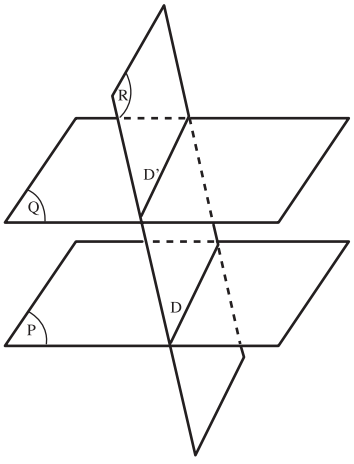
تطبيق 2 :

في الشكل المقابل P و Q مستويان متوازيان

و R مستوي ثالث يقطع المستوي P وفق المستقيم D

ويقطع المستويQ وفق المستقيم D'

بين أن المستقيمين D و D' متوازيان.



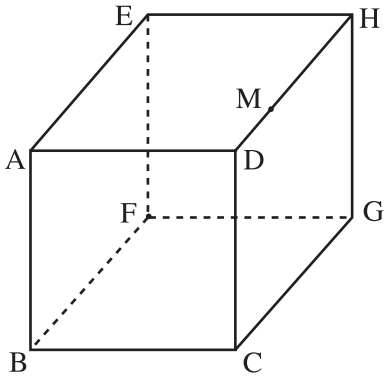
تطبيق 3 :

ليكن D مستقيما موازيا لمستوي P.

أجب بـ "صواب" أو " خطأ " معللا جوابك

كلّ مستوي موازي للمستقيم D هو موازي للمستوي P.

تمرين مرفق بحلّ :



يمثّل الشّكل المقابل متوازي المستطيلات ABCDEFGH

و M نقطة من [DH].

1) بيّن أن المستويين (AMG) و (BFG) متقاطعان.

2) ليكن $(AMG)\cap(BFG)=\Delta$

بيّن أنّ Δ و (AM) متوازيان.

3)أ- عيّن K نقطة تقاطع المستقيمين Δ و (BF).

ب- بيّن أن $(AMG)\cap(ABF)=(AK)$

ج- بيّن أن (AK)//(MG)

4) استنتج طبيعة الرّباعي AMGK.

5) بيّن أنّ الرباعي ABGH هو متوازي الأضلاع.

6) نعتبر O مركز متوازي الأضلاع ABGH.

أثبت أنّ المستقيم (BH) هو قاطع للمستوي (AMG) في النقطة O.

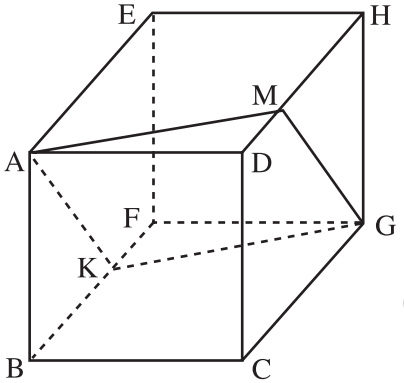
الحلّ :

1) يشترك المستويان **(AMG)** و **(BFG)** في النقطة **G** و هما غير منطبقان

A تنتمي إلى المستوي**(AMG)** و لا تنتمي إلى المستوي **(BFG)** إذن هما متقاطعان.

2) لنا **(AM)**$\subset$**(AED)** و $\Delta\subset(BFG)$ و $(BFG)\cap(AED)=\varnothing$ إذا $(AM)\cap\Delta=\varnothing$

و بما أنّ Δ و **(AM)** محتويان في نفس المستوي **(AMG)** فإنّهما متوازيان.



3)أ- انظر الشّكل.

نرسم Δ المستقيم من المستوي **(BFG)** المارّ **G**

و الموازي لـ **(AM)** يقطع **(BF)** في النّقطة **K**.

ب- يشترك المستويان **(AMG)** و **(ABF)**

في النّقطتين **A** و **K** ($K\in\Delta$ و $\Delta\subset(AMG)$ و $K\in(BF)$)

وهما غير منطبقان (G تنتمي إلى المستوي (AMG) ولا تنتمي إلى المستوي (ABF))

إذن هما متقاطعان وفق المستقيم (AK).

ج- لنا $(MG)\subset(DCG)$ و $(AK)\subset(ABE)$

و $(ABE)\cap(DCG)=\varnothing$ إذا $(AK)\cap(MG)=\varnothing$

وبما أن (MG) و (AK) محتويان في نفس المستوي (AMG) فإنّهما متوازيان.

4) لنا (AM) // (KG) و (AK) // (MG) إذن الرباعي AMGK هو متوازي الأضلاع.

5) نعلم أن الحرفين [AB] و [HG] متقايسان ومتوازيان إذن الرّباعي المحدّب ABGH هو متوازي الأضلاع.

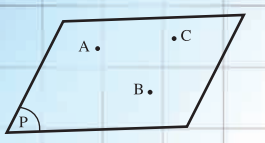
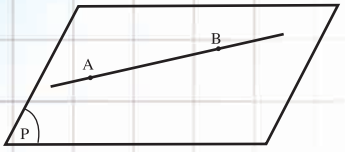
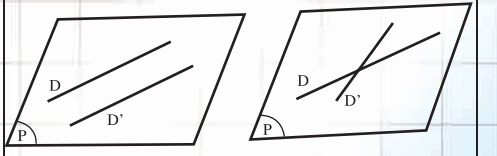
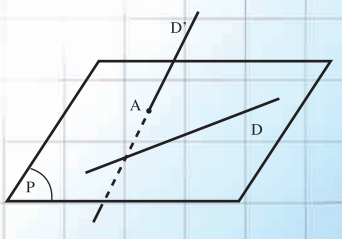
6) النقطة O هي مركز متوازي الأضلاع ABGH إذن O هي منتصف القطعة [BH]

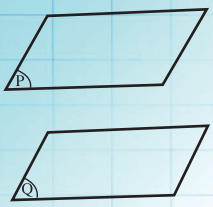
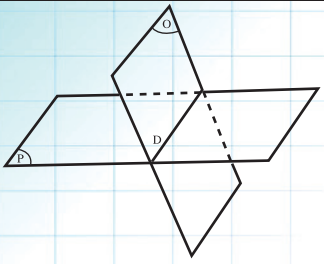
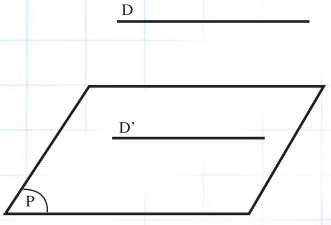
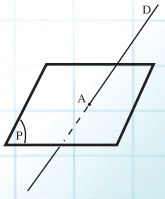
وبالتالي فهي تنتمي إلى المستقيم (BH).

وهي أيضا منتصف القطعة [AG] ونعلم أن المستقيم (AG) محتو في المستوي (AMG) إذن O تنتمي إلى المستوي (AMG) وبالتالي فهي نقطة مشتركة للمستقيم (BH) والمستوي (AMG).

النقطة B تنتمي إلى المستقيم (BH) و لا تنتمي إلى المستوي (AMG) إذن المستقيم (BH) غير محتو في المستوي (AMG) وبالتّالي فهو يقطع المستوي (AMG) في النقطة O.

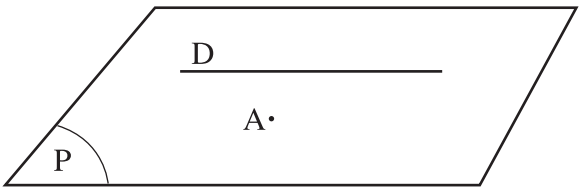
أحوصـل

ثلاث نقاط من الفضاء ليست على استقامة واحدة تحدّد مستو واحد من الفضاء		P= (ABC)
إذا كانت لمستقيم نقطتان مشتركتان مع مستوي فهو محتو في هذا المستوي		$A \in P$ و $B \in P$ إذن $(AB) \subset P$
مستقيمان من نفس المستوي هما متقاطعان أو متوازيان.		إذا كان $D \subset P$ و $D' \subset P$ فإنّ $D//D'$ أو D و D' متقاطعان.
مستقيمان ليسا في نفس المستوي هما مستقيمان غير متوازيين و غير متقاطعين		$D \cap D' = \varnothing$ و D و D' غير متوازيين

مستويان متوازيان هما مستويان غير متقاطعين.		P//Q
مستويان متقاطعان يتقاطعان وفق مستقيم		$P \cap Q=D$
مستقيم و مستوي متوازيان		D //P (يوجد مستقيم 'D محتو في المستوي P و موازٍ للمستقيم D)
مستقيم D يقطع مستوٍ في نقطة A		$D \cap P=\{A\}$

تمارين

1 يمثّل الشّكل المقابل مستوي P



محدّدا بمستقيم D و بنقطة A لا تنتمي إلى D.

نعتبر D′ مستقيما مارّا من النقطة A

و قاطعا للمستقيم D في نقطة B.

بيّن أنّ المستقيم D′ محتو في المستوي P.

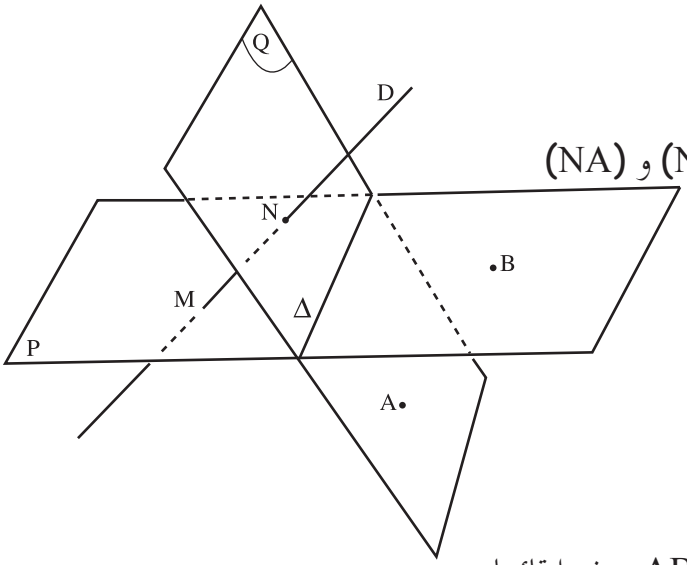
2 يمثّل الرّسم المقابل مستويين متقاطعينP و Q

ومستقيما D قاطعا لهما .

أ) حدّد P ∩ D و Q ∩ D.

ب) انقل الشّكل وارسم المستقيمات (NB) و (NA)

و (AB) و (MA).



3 انقل الشّكل المقابل حيث ABCA'B'C' موشورا قائما

وM نقطة من الحرف [B'C'] و N نقطة من الحرف [BC] .

أ) ما هي الوضعيّة النسبيّة للمستقيم (AA') والمستوي (BCC') ؟

ب)استنتج أن المستقيمين (AA') و (MN) غير متقاطعان.

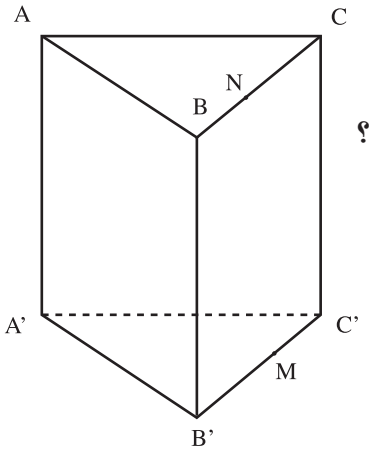
ج) بيّن أنّ المستقيم (B'N) محتو في المستوي (BCC')

وأنّ (B'N) و (CC') متقاطعان.

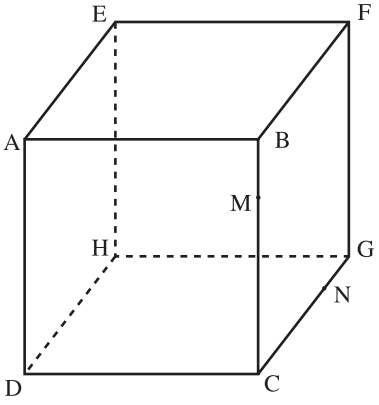
د) بيّن آنّ (B'N) و المستوي (ACC') متقاطعان.

ارسم النّقطة I نقطة تقاطعهما.

هـ) ارسم النّقطة J نقطة تقاطع المستقيم (BM) و المستوي (ACC').



4 ارسم الشّكل المقابل حيث :



ABCDEFGH مكعّبا و M نقطة من [BC]

و N نقطة من [CG].

ا) ما هي الوضعيّة النسبيّة للمستقيم (AM) والمستوي (ADE) ؟

ب) ما هي الوضعيّة النسبيّة للمستويين (ADE) و (BCF) ؟

ج) ما هي الوضعيّة النسبيّة للمستقيم (AM) والمستوي (BCF) ؟

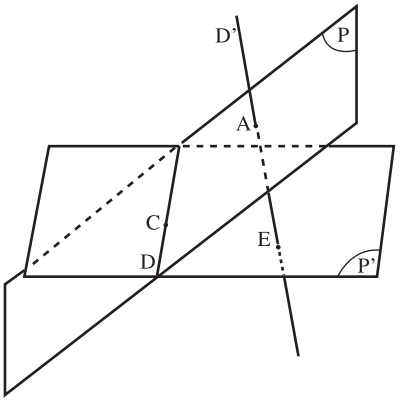
د) بيّن أنّ المستقيمين (FM) و (CG) محتويان في نفس المستوي.

هـ) المستقيمان (FM) و (CG) يتقاطعان في نقطة I . ارسم هذه النّقطة.

و) عيّن نقطة تقاطع المستقيم (FM) والمستوي (DCG) .

ز) بيّن أنّ المستقيم (BN) والمستوي (EFG) متقاطعان وعيّن النّقطة J نقطة تقاطعهما.

5 انقل الشّكل المقابل حيث



- P و P' مستويان متقاطعان وفق المستقيم D.
- C نقطة تنتمي إلى D.
- D' مستقيم يقطع P في A ويقطع P' في B .

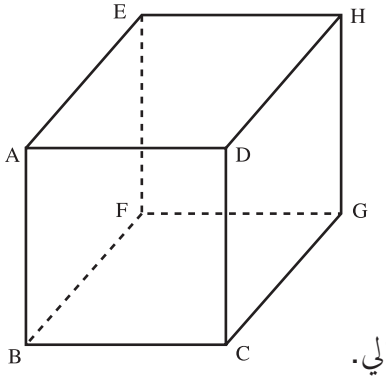
نرمز بـ Q للمستوي (ABC).

ا) ارسم $Q \cap P$ و $Q \cap P'$

ب) حدّد $D \cap Q$.

ج) بيّن أنّ المستقيمين D و D' ليسا في نفس المستوي.

6 يمثّل الشّكل المقابل متوازي المستطيلات ABCDEFGH



1) حدّد تقاطع المستويين (EGC) و (EDG)

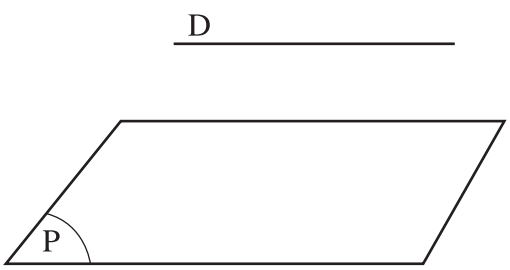
2) ما هي الوضعيّة النسبيّة للمستقيمين (DF) و (EG) ؟

3) بيّن أنّ (AH) و (BG) متوازيان.

4) نعتبر I و J مركزي المستطيلين ABFE و BFGC على التّوالي.

بيّن أنّ المستويين (AFC) و (BEG) متقاطعان حسب المستقيم (IJ).

7 يمثّل الرّسم المقابل مستويا P و مستقيما D موازيا له.

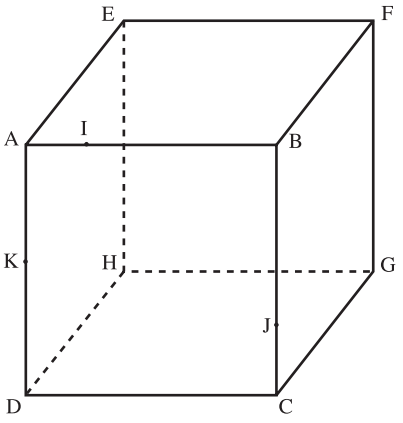


أ) ارسم مستويا Q محتويا المستقيم D
وقاطع للمستوي P حسب مستقيما 'D.

ب) ما هي الوضعيّة النسبيّة للمستقيمين D و 'D ؟

ج) ماذا يمكنك أن تستنتج ؟

8 يمثل الشّكل المقابل مكعّبا ABCDEFGH حيث I و J و K نقط تنتمي على التّوالي إلى الأحرف [AB] و [BC] و [AD].



1) انقل الشكل.

2) حدّد تقاطع المستويين (ABF) و (BCG).

3) أ- بيّن أنّ المستقيمين (JG) و (BF) متقاطعان

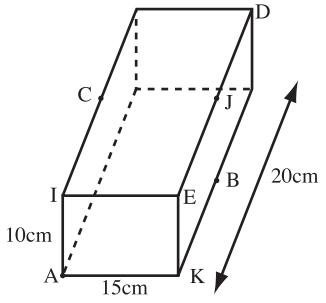
ب- استنتج أنّ المستقيم (JG) والمستوي (ABF) متقاطعان وحدّد O نقطة تقاطعهما.

4) ما هي الوضعيّة النسبيّة لكلّ من :

- المستقيمين (EK) و (IJ)؟
- المستقيمين (KI) و (GJ) ؟
- المستقيمين (HJ) و (DI) ؟

5) ما هي الوضعيّة النسبيّة للمستويين (GKH) و(AEH) ؟

9 1) يمثّل الرسم المقابل متوازي المستطيلات



طول أحرفه 10cm و 15cm و 20cm.

و B و C و J منتصفات ثلاث أحرف من هذا الشّكل.

أحسب حجمي الهرمين JIAKE و CEKBJ

2) أ- بيّن أنّ الرّباعي EJBK متوازي الأضلاع.

ب – استنتج طبيعة الرّباعي IJBA.

3) بيّن أنّ الرّباعي CDJI متوازي الأضلاع.

استنتج طبيعة الرّباعي ACDB.

4) أ- بيّن أن المستويين (ABC) و (IEC) يتقاطعان حسب المستقيم (CD).

ب- بيّن أن المستويين (ABC) و (JDB) يتقاطعان حسب المستقيم (DB).